Fachbereich Mathematik & Informatik
Freie Universität Berlin
Prof. Dr. Carsten Gräser, Xingjian Zhang-Schneider

13. Übung zur Vorlesung

# Analysis I

WS 2020/2021

http://numerik.mi.fu-berlin.de/wiki/WS_2020/analysisI.php

**Abgabe: Fr., 5. März 2021, 12:00 Uhr**

**1. Aufgabe** (4 Punkte)
Sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge Riemann-integrierbarer Funktionen $f_n : [a,b] \to \mathbb{R}$ die gleichchmäßig gegen ein $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ konvergiert. Zeigen Sie, dass dann auch $f$ Riemann-integrierbar ist.

**2. Aufgabe** (4 Punkte)
Sei $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}$ eine Treppenfunktion mit

$$\varphi|_{(x_{k-1},x_k)} = c_k \qquad k = 1,\dots,n$$

für $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ und $c_1,\dots,c_n \in \mathbb{R}$. Definiere das Integral von $\varphi$ über $[a,b]$ durch

$$\int_a^b \varphi(x)dx := \sum_{k=1}^n c_k(x_k - x_{k-1}).$$

Zeigen Sie, dass das Integral wohldefiniert ist, d.h. dass die Definition nicht von der Wahl der Zerlegung $a = x_0 < \dots < x_n = b$ abhängt.

**3. Aufgabe** (4 Punkte)
Seien $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ beschränkte Funktionen.

a) Zeigen Sie, dass das Oberintegral $\int_a^{b}(\cdot)dx$ subadditiv ist, d.h. dass

$$\int_a^{b*}(f+g)(x)dx \leq \int_a^{b*} f(x)dx + \int_a^{b*} g(x)dx$$

gilt. Geben Sie ein Beispiel an, für das "$<$"gilt.

b) Zeigen Sie, dass für $\lambda \geq 0$ gilt:

$$\int_a^{b*}(\lambda f)(x)dx = \lambda \int_a^{b*} f(x)dx.$$

**4. Aufgabe** (1+1+2 Punkte)
Berechnen Sie Stammfunktionen von

a) $x \mapsto x\sin(x)$,

b) $x \mapsto x^2\cos(x)$,

c) $x \mapsto x^3 e^x$.

Hinweis: Benutzen Sie partielle Integration.

## Allgemeine Hinweise

Bitte beachten Sie die auf der Vorlesungshomepage angegebenen Hinweise zur Bearbeitung und Abgabe der Übungszettel.