Analysis I

Menge - Was ist eine Menge?

Nach Cantor (1845-1918)

„Zusammenfassung bestimmter, wohlunterschiedener Objekte unser Anschauung oder unseres Denkens zu einem Ganze"

→ Die Objekte einer Menge heißen __Elemente__ der Menge.

Der Begriff „Menge" sowie der Begriff „Element" sind in diesem Zusammenhang synonym.

__Notation:__ A - Menge, $\underbrace{x \in A}$, $x \notin A$.

„x ist element der Menge A"

- Sind $a_1, a_2, a_3, \dots$ gegebene Objekte, $\{a_1, \dots, a_n\}$ ← Mengenklammer
- $\{a\}$. - Die Menge, die nur aus dem einzigen Element a besteht.
- X - Menge und $A(x)$ eine Aussage über Element $x \in X$, die für gewisse $x \in X$ zutrifft, für andere nicht, so bezeichnet $\{x \in X \mid A(x)\}$, kurz $\{x \mid A(x)\}$, die Menge aller derjenigen $x \in X$, für die Aussage zutrifft.
- $\emptyset$, $\{\emptyset\}$,

- $\mathbb{N}, \mathbb{Q}, \mathbb{Z}, \mathbb{R}, \mathbb{C}, .$
- $A \subset B$ (Teilmenge)

„Die Menge A ist eine Teilmenge der Menge B"

<u>Bsp:</u> (Tut) $(A \subset B) \wedge (B \subset C)$ (*)

$\Rightarrow A \subset C$

kurz beweisen

(*) $(A \subset B) \wedge (B \subset A) \Rightarrow A = B$

Beweisskizze: $x \in A$ bel, „$\Rightarrow \ldots \Rightarrow$"

$\Rightarrow \underline{x \in B} \Rightarrow A \subset B$.

(Vereinigung) $A \cup B := \{x \mid x \in A \vee x \in B\}$.

(Durchschnitt) $A \cap B := \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$.

(Übung) $A \subset B \Leftrightarrow A \cap B = A$

$A \subset B \Leftrightarrow A \cup B = B$.

(Differenz) $A \setminus B := \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\}$

(symm. Diff) $A \Delta B := (A \cup B) \setminus (A \cap B)$.

. . "

„Russell's paradox"

„Die Menge aller Mengen, die sich nicht selbst als Element enthalten"

$$R := \{ x \mid x \notin x \}.$$

(Übung)

$$\Leftrightarrow \quad R \in R \Leftrightarrow R \notin R \quad \lightning$$

$\rightsquigarrow$ Die modere Mengenlehre basiert auf den Zermelo-Fraenkel-Axiomen

---

. Sind a und b irgendwelche Objekte, so bezeichnet der Ausdruck (a,b) als das „geordnete Paar a, b"

(a,b) ist mit $\{a,b\}$ zu unterscheiden.

$$\begin{matrix} (a,b) & & \{a,b\} \\ \neq & & \shortparallel \\ (b,a) & & \{b,a\}. \end{matrix}$$

(Gleichheit): $(a,b) = (c,d)$

$$\Leftrightarrow \quad a = c \wedge b = d$$

Bsp: $f(x) = x^2 - 5x + 6 = 0$

$$\mathbb{L} = \{2,3\}.$$

Die Lösung des LGS:

$$\begin{aligned} x + 2y &= 5 \\ 4x - y &= 2 \end{aligned}$$

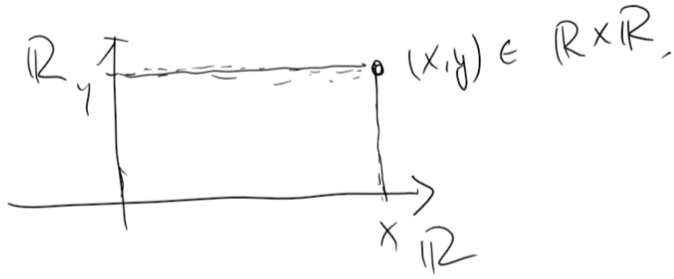
ist das geordnete Paar $(x,y) = (1,2)$.

Def (kar. Prod.) Die Menge $\overset{\text{Menge}}{A} \times \overset{\text{Menge}}{B} := \{ (a,b) \mid a \in A, b \in B \}$.

heißt kartesisches Produkt der Menge A und B.

$\rightsquigarrow$ (Descartes, 1596 – 1650)

Bsp:



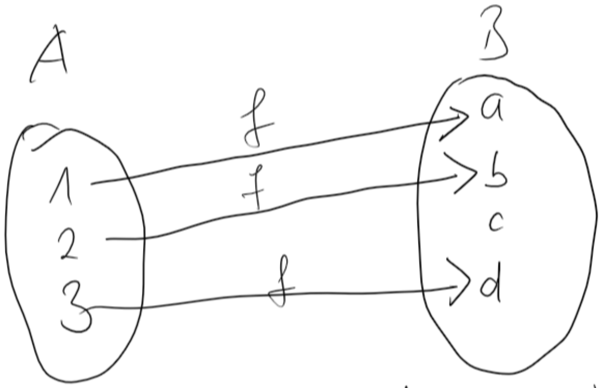
Bsp: $A := \{a, b, c\}$, $B = \{1, 2\}$.

$$A \times B = \{ (a,1), (a,2), (b,1), (b,2), (c,1), (c,2) \}.$$

<u>Funktionen:</u> A, B - Mengen, unter einer Funktion oder Abbildung f von A nach B, in Zeichen

$$f : A \to B,$$

versteht ~~ma~~ wir eine Zuordnungsvorschrift, die für jeden $x \in A$ <u>genau einen</u> $y \in B$ festlegt.



$f(1) = a$, $f(2) = b$, $f(3) = d$

$1 \mapsto a$, $2 \mapsto b$, $3 \mapsto d$

$f : x \mapsto y$

Funktionswert an der Stelle x, wird auch mit $f(x)$ bezeichnet.

$y = f(x)$

- Die Menge A ist der Definitionsbereich und
  " " B " " Wertebereich von f.

<u>Notation:</u> $\mathbb{D}$, $D(f)$, $W(f)$, $R(f)$, $\mathrm{Im}(f)$.

- Zu jeder Funktion $f : A \to B$
  gehört ihr Graph (Relation $R \subseteq A \times B$)

$$\mathcal{G}(f) := \{ (x,y) \in A \times B \mid x \in A,\ y = f(x) \}$$

eine Teilmenge von $A \times B$.

Eigenschaft:

1) Zu jeden $x \in A$ gibt es ein $y \in B$ mit $(x,y) \in \mathcal{G}$

2) Umgekehrt: Ist $\mathcal{G}$ eine bel. Teilmenge von $A \times B$ mit der Eigenschaft 1), so gibt es eine Funktion $f : A \to B$, deren Graph gerade die Menge $\mathcal{G}$ ist.

Bem: Der Funktionswert $f(x)$ ist für jedes $x \in A$ das eindeutig bestimmte $y \in B$ mit $(x,y) \in \mathcal{G}$.

Def (Funktion) Eine Funktion $f : A \to B$ ist eine Teilmenge $\mathcal{G} \subset A \times B$, die die Eigenschaft 1) besitzt.

Argument

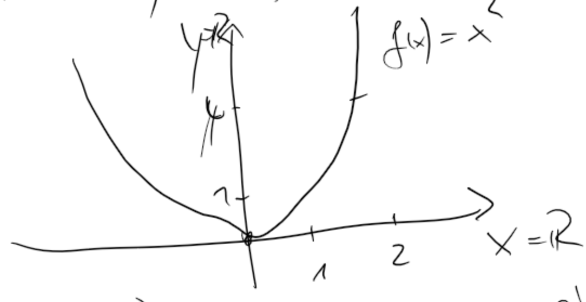
x ist das Argument

Notation: $f,\ f(\cdot),\ f(x),\ g,\ g(x),\ g(y),\ h(x),\ \varphi(\xi)$

Variable $\in D(f)$.

Variable $\in W(f)$.

$f : x \mapsto x^2$, $D(f) = \mathbb{R}$, $\mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}_0^+$



$f : x \mapsto \frac{x}{1-x^2}$, $g : x \mapsto \sin(x)$

$M \subset A$, $f(M) := \underbrace{\{ f(x) \mid x \in M \}}_{\text{Bildmenge der Menge } M}$.

Def: (Surjektive Abb)

$f: A \to B$, f heißt surjektiv, wenn jeder Punkt $y \in B$ als Bildpunkt wenigstens eines Punktes $x \in A$ auftritt.

Def: (injektive Abb) Die Abbildung $f: A \to B$ heißt **injektiv**, wenn keine 2 verschiedenen Punkte $x_1, x_2 \in A$ denselben Bildpunkt $y \in B$ besitzen, d.h. für bel. $x_1, x_2 \in A$ gilt:

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2.$$

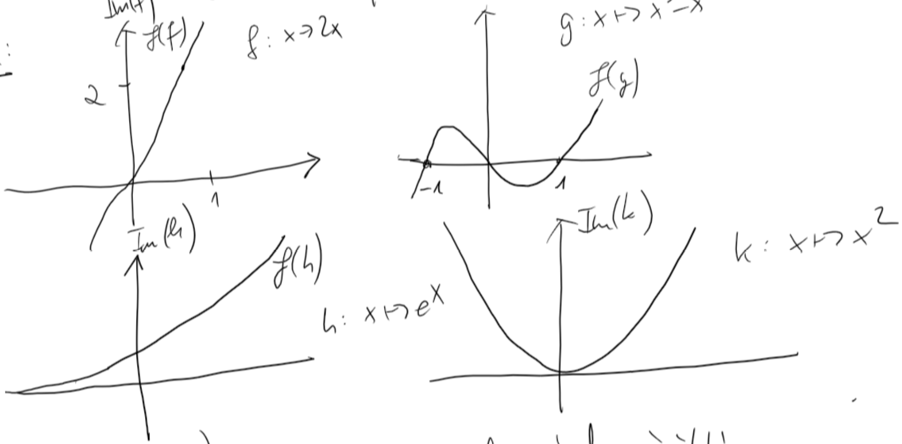
Def (Bijektive Abb.) Ist $f: A \to B$ gleichzeitig surjektiv und injektiv, so heißt f bijektiv.

$f, g, h, k: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

Im(f)

Im(f) injektiv, so heißt f bijektiv:

Beispiele:



(Übung im Text): f und h sind injektiv, g und k nicht. ...

↑ Übung

... $x \in A$ haben wir genau

Bijektive Abbildung:

1) für jedes $x \in A$ haben wir genau ein $y \in B$

2) für jedes $y \in B$ haben wir genau ein $x \in A$.

Folgerung: Für jede bijektive Abbildung $f: A \to B$ ist die Umkehrabbildung gegeben durch

$$f^{-1}: B \to A, \quad y \mapsto x \overset{!}{=} \text{„} x \in A \text{ mit } f(x) = y \text{"}$$

Vorlesungsende

Es gilt $(f^{-1})^{-1} = f$. Beweis (Übung).

Beispiel: $f: x \to 2x$, $f(x) = 2x$ | $f^{-1}: y \mapsto y/2$, $f^{-1}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Natürliche Zahlen

$$\mathbb{N} := \{1, 2, 3, 4, 5, 6 \ldots\}$$

Def: Die Nachfolgeabbildung ist die Abbildung

$$\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$$
$$n \mapsto n+1$$

Wir können jede gegebene Zahl $k \in \mathbb{N}$, können wir noch um 1 erhöhen!

Vollständige Induktion:

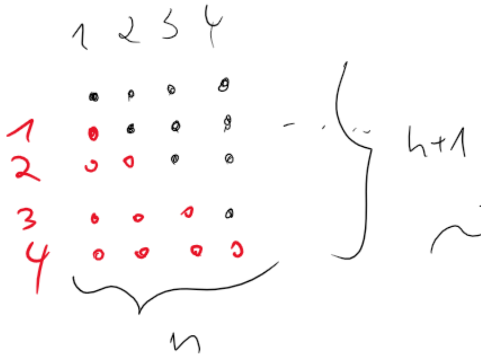
Problem: $$\underbrace{\sum_{k=1}^{n} k}_{} \overset{?}{=} \frac{n(n+1)}{2}.$$

$$1+2+3+\cdots+n = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$\begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & \cdots & n \\ n & n-1 & n-2 & \cdots & \cdots & 1 \\ \hline \end{array}$$

$$\underbrace{n+1 \quad n+1 \quad \cdots \quad n+1}_{n\text{-mal}}$$

$$\rightsquigarrow \frac{n\cdot(n+1)}{2}$$



$$\rightsquigarrow_{n=3} \frac{n\cdot(n+1)}{2}$$

„Direkter Beweis"

Problem: Eine Aussage $A(n)$, $n \in \mathbb{N}$, soll bewiesen werden:

$A(1)$, $A(2)$ … unendliche viele Aussagen beweisen!

Prinzip: Sei $n_0 \in \mathbb{N}$ und $A(n)$ für jedes $n \geq n_0$ eine Aussage. Um $A(n)$ für alle $n \geq n_0$ zu beweisen, genügt es zu zeigen:

(IA): $A(n_0)$ ist richtig

(Induktionsschritt): Für ein bel $n \geq n_0$ gilt

Falls $A(n)$ richtig ist, so ist auch $A(n+1)$ richtig.

Vor.

$$\sum_{k=1}^{n} k \overset{\text{z.z.}}{=} \frac{n(n+1)}{2}$$

Beweis im Tutorium (Übung)

$\square$