Beweis: $A(n_0)$ ist richtig

$A(n) \rightsquigarrow A(n+1)$

1. $A(n_0)$, $n_0 = 1$ ist richtig.

$$\sum_{k=1}^{1} k = 1 = \frac{1 \cdot 2}{2} = 1 \checkmark$$

2. Induktionsschritt: $\underbrace{A(n)}_{\text{Annahme}} \rightsquigarrow \underbrace{A(n+1)}_{\text{Folgerung}}$.

wir nehmen an, dass $A(n)$ gilt, das heißt

„richtig" $\to$ $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$ " erfüllt ist.

Dann $A(n+1) = \left(\sum_{k=1}^{n} k\right) + (n+1) \overset{(IV)}{=} \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$

$\left(\overset{!}{=} A(n+1)\right)$

$\Rightarrow$ $A(n) \Rightarrow A(n+1)$ //

Falsche Behauptung

$(IV): \sum_{k=1}^{n} k = \frac{(n+\frac{1}{2})^2}{2}$: Was passiert $A(n) \rightsquigarrow A(n+1)$?

$$\sum_{k=1}^{n+1} k = \sum_{k=1}^{n} k + (n+1) \overset{(IV)}{=} \frac{(n+\frac{1}{2})^2}{2} + (n+1) = \frac{n^2+3n+9/4}{2} = \frac{((n+1)+\frac{1}{2})^2}{2}$$

Diese Aussage ist trotzdem für alle $n \geq 1$ falsch.

$$(IA): \quad 1 = \frac{(1+\frac{1}{2})^2}{2} = \frac{(1.5)^2}{2} = \frac{2{,}25}{2}.$$

Plan: $\mathbb{N}$ haben wir kennengelernt.
$\mathbb{Z}$ lässt sich als Erweiterung von $\mathbb{N} \cup \{0\}$

Äquivalenzrelation:

Def: (Relation) A - Menge, $R \subset A \times A$ heißt eine zweistellige Relation auf A.

Bem: (x,y) - das geordnete Paar
R wird in gewissem Sinn von $((\tilde{x},\tilde{y}) \notin R)$ nicht zu R gehörenden Paaren „ausgezeichnet".

Notation: $=, \sim, <, \leq, \geq$ usw.

$\rightsquigarrow$ Von besonderer Bedeutung sind Äquivalenzrelationen, die eine „Abschwächung" der Relation darstellen

Def: (ÄR): Eine 2-stellige Relation auf A, die

1) $(x,x) \in R$ für alle $x \in A$ (reflexiv)
{ Vereinfachte Notation $x \sim x$
2) $\forall x,y \in A: (x,y) \in R \Rightarrow (y,x) \in R$, (symmetrisch) } $x \sim y \Rightarrow y \sim x$ (kurz)
3) $\forall x,y,z \in A: (x,y) \in R$ und $(y,z) \in R \Rightarrow (x,z) \in R$, (Transitivität),

erfüllen heißt ÄR auf A.

Gilt $(x,y) \in R$ oder $x \sim y$, so heißen die Elemente x und y äquivalent.

Def (Äquivalenzklassen):

Ist R eine Äquivalenzrelation auf einer Menge $A \neq \emptyset$, so nennen wir die Menge

$$[a] := \{ x \in A \mid x \sim a \},$$

aller zu $a \in A$ äquivalenten Elemente, die R-Äquivalenzklasse von a.

Jedes Element $\tilde{a} \in [a]$ ist ein Repräsentant dieser Klasse.

(Satz): Eine Äquivalenzrelation auf der Menge A bewirkt eine Zerlegung von A in disjunkte nicht leere Teilmenge derart, dass je 2 Elemente ein und derselben Teilmenge äquivalent, je 2 Elemente verschiedener Teilmenge aber nicht äquivalent sind.

Beweis: Sei $x_0 \in A$ fest und bel, dann ist die Menge

$$[x_0] := \{ x \in A \mid x \sim x_0 \}. \quad (\text{Äk von } x_0),$$

wegen der Reflexivität nicht leer. Weil jedes Element ist reflexiv zu sich selbst und somit enthält $[x_0]$ wenigstens das Element x_0.

Da x_0 bel. ist, ist keine Klasse leer und somit liegt jedes Element in wenigstens eine Klasse.

Wir behaupten 2 verschieden erzeugte Äquivalenzklassen $[x_1]$ und $[x_2]$ sind

1) disjunkt: $[x_1] \overset{DS}{\cap} [x_2] = \emptyset$

2) oder ein und dieselbe Teilmenge von A.

$[x_1] = [x_2] \iff [x_1] \subset [x_2] \wedge [x_2] \subset [x_1]$

Sei $x_0 \in A$ mit der Eigenschaft

$$x_0 \in [x_1] \cap [x_2]$$

und ist x ein bel. Element von $[x_1]$, so gelten

$$x \sim x_1 , \quad x_1 \sim x_0 , \quad x_0 \sim x_2$$

$$\overset{\text{Transitivität}}{\leadsto} \quad x \sim x_2 , \quad \underline{\text{d.h.}} \quad x \in [x_2] \Rightarrow [x_1] \subset [x_2] .$$

Aus Symmetriegründen gilt dann auch $[x_2] \subset [x_1]$ und somit gilt

$$[x_1] = [x_2] .$$

2 Elemente x_1 und x_2 liegen genau dann in der selben Klasse, in $[x_2]$, wenn gilt: $x_1 \sim x_2$. $\square$