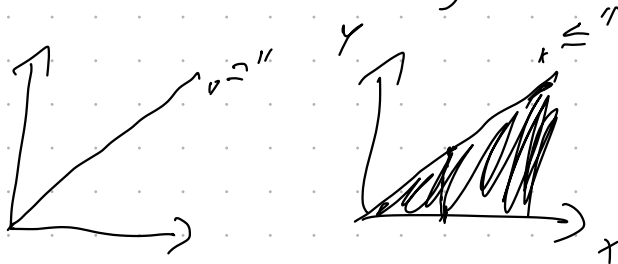


17 Erinnerung

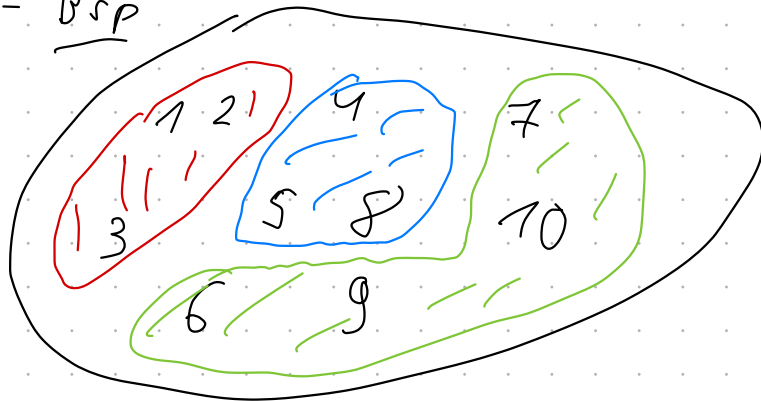
- Mengen ($ZFC \rightarrow$ Mengenlehre)
- Funktionen / Abbildungen
- Natürliche Zahlen $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$
 - Nachfolger $n \mapsto \sigma(n) = n+1$
 - vollständige Induktion
- Relationen: $R \subseteq A \times A$
 - x steht in Relation zu y ($x \sim y \Leftrightarrow (x, y) \in R$)
 - Bsp: $=$, $<$, $\geq$
- Äquivalenzrelationen: $R \subseteq A \times A$
 - R symmetrisch $x \sim y \Leftrightarrow y \sim x$ | transitiv ($x \sim y$ und $y \sim z \Rightarrow x \sim z$)
 - Reflexiv $x \sim x$



(18)

- $x \sim y$ "x ist äquivalent zu y"
- $[a] := \{x \in A \mid x \sim a\}$ Äquivalenzklasse von a
- jedes $b \in [a]$ heißt Repräsentant von $[a]$
und es gilt $[a] = [b] \quad \forall b \in [a]$
- disjunkte Zerlegung: $[a] \neq [b] \Rightarrow [a] \cap [b] = \emptyset$
 $A = \bigcup_{a \in A} [a]$

- Bsp



$$[1] = \{1, 2, 3\} = [2] = [3]$$

$$[4] = \{4, 5, 8\} = [5] = [8]$$

$$[6] = \{6, 7, 9, 10\}$$

$$= [7] = [9] = [10]$$

19 Literatur

- O. Forster, Analysis 1

- H. Heuser - " -

- K. Königsberger - " -

- W. Rudin Principles of Math. Analysis (dt., Analysis)

Zentrale Themen :

- Konvergenz von Folgen
- Stetigkeit
- Kompaktheit
- Diff.barkeit
- Integration

Anal 1 1dim.
 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

Anal 2/3 n-dim.
 $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$

Was ist $\mathbb{R}$?

(20) Def 1 Sei K eine Menge und $+: K \times K \rightarrow K, \cdot: K \times K \rightarrow K$ zwei Abb.
 Dann heißt $(K, +, \cdot)$ ein Körper, wenn gilt:

$$\left\{ \begin{array}{l} - \text{Assoziativität: } a + (b + c) = (a + b) + c \quad \forall a, b, c \in K \\ - \text{neutrales Element: } \exists 0 \in K: a + 0 = a \quad \forall a \in K \\ - \text{inverse Elemente: } \forall a \in K \exists -a \in K: a + (-a) = 0 \\ - \text{Kommutativität: } a + b = b + a \quad \forall a, b \in K \end{array} \right\} (K, +) \text{ ist abelsche Gruppe}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} - \text{Assoziativität: } a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c \quad \forall a, b, c \in K \\ - \text{neutrales Element: } \exists 1 \in K: a \cdot 1 = a \quad \forall a \in K \\ - \text{inverse Elemente: } \forall a \in K \setminus \{0\} \exists a^{-1} \in K: a \cdot a^{-1} = 1 \\ - \text{Kommutativität: } a \cdot b = b \cdot a \quad \forall a, b \in K \end{array} \right\} (K \setminus \{0\}, \cdot) \text{ ist abelsche Gruppe}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} - \text{Distributivgesetze: } a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c \\ (a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c \end{array} \right\} \quad \forall a, b, c \in K$$

(21) Wir können mit Elementen eines Körpers „normal“ rechnen!
„Sie sind Zahlen.“

Es gibt viele verschiedene Körper:

$\mathbb{Q}$ rationale Zahlen

$\mathbb{R}$ reelle Zahlen

$\mathbb{C}$ komplexe Zahlen

$\mathbb{Z}_k$ k Primzahl

} sind Körper

$\mathbb{N}$ ist kein Körper! Keine inversen Elemente $a + x = 0$
- ?

Idee: - kleinster Körper der Welt $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Q}$

- In $\mathbb{Q}$ „fehlt“ noch ganz viel, z.B. $\sqrt{2}$, π , e

- archimedisch geordneter, vollständiger Körper $\rightarrow \mathbb{R}$

Wie kommen wir von $\mathbb{N}$ zu $\mathbb{R}$?

(22)

Fahrplan

$\mathbb{N}$: neutrales Element 0, + assoziativ, + kommutativ

es fehlen inverse bzgl. "+": Es ex. kein $x \in \mathbb{N}$ $1+x=0$

$\rightarrow$ vergrößere $\mathbb{N}$ zu $\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$

$\mathbb{Z}$: neutrales Element 1 bzgl. " $\cdot$ "

es fehlen inverse bzgl. " $\cdot$ ": Es ex. kein $x \in \mathbb{Z}$: $2 \cdot x = 1$

$\rightarrow$ vergrößere $\mathbb{Z}$ zu $\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} \mid p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0 \right\}$

$\mathbb{Q}$: ist geordnete Körper

$\mathbb{Q}$ nicht vollständig. Im Allgemeinen haben Cauchy-Folgen
keinen Grenzwert

$\rightarrow$ vergrößere $\mathbb{Q}$ zu $\mathbb{R} = \left\{ \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \mid a_n \in \mathbb{Q}, a_n \text{ ist (F)} \right\}$

Was heißt „vergrößere A zu B“ $\rightarrow$ Äquivalenzrelationen