(23) Die natürlichen Zahlen (axiomatisch)

Def 2 Peano-Axiome

(1) $0 \in \mathbb{N}$ — 0 ist eine natürliche Zahl

(2) $\exists \sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N},\ n \mapsto \sigma(n)$ — Jede nat. Zahl n hat einen Nachfolger $\sigma(n)$

(3) $\forall n \in \mathbb{N} : \sigma(n) \neq 0$ — 0 ist kein Nachfolger

(4) $\forall n,m \in \mathbb{N}\ (\sigma(n) = \sigma(m)) \Rightarrow (n = m)$ — Versch. nat. Zahlen haben versch. Nachfolger

(5) $[A \subseteq \mathbb{N},\ 0 \in A,\ \sigma(A) = \{\sigma(a) \mid a \in A\} \subseteq A]$ vollständige Ind.

$\Rightarrow A = \mathbb{N}$

Anschaulich $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$ (= $0, \sigma(0), \sigma(\sigma(0)), \dots$) $\quad \sigma(n) = n + 1$

Wir nehmen an, dass $\mathbb{N}$ mit (1) ... (5) ex.

(Konstruieren aus ZFC $\quad 0 = \emptyset,\ \sigma(n) = \{n\},\ 1 = \{\emptyset\},\ 2 = \{\{\emptyset\}\}$)

$n, m \in \mathbb{N}$, $m = \underbrace{\sigma(\sigma(\sigma(\ldots}_{m\text{-mal}}(0)\ldots)$

$n + m = \underbrace{\sigma(\sigma(\sigma(\ldots}_{m\text{-mal}}(n)\ldots) = n \underbrace{+1+1+1}_{m\text{-mal}}$

2.4 Def 3 Addition in $\mathbb{N}$

(1) $n + 0 := n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

(2) $n + \sigma(m) := \sigma(n+m) \quad \forall n, m \in \mathbb{N}$

Wg. vollst. Ind. ist $+ : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ wohldef.

Anschaulich: (2) $n + (m+1) = (n+m)+1$

Bemerkung (ohne Beweis)

(1) $+ : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ ist assoziativ und kommutativ

(2) $0 \in \mathbb{N}$ ist neutrales Element der Addition, d.h.

$$n + 0 = 0 + n = n$$

Inverse Elemente? Es ex. i.A. kein $(-a) \in \mathbb{N}$ mit $a + (-a) = 0$.

(25) **Problem** Zu $a, b \in \mathbb{N}$ hat die Gleichung $a + x = b$ i.A. keine Lösung $x \in \mathbb{N}$.

Idee: Wir definieren uns eine neue Zahl $x := (a, b)$ als „die Lösung". **Anschaulich** „$x = b - a$" $\in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$

Fragen – Es gibt viele Gleichungen mit der gleichen Lösung:

Bsp

$$\left.\begin{array}{ll} 2 + x = 1 & x = (2, 1) \\ & \quad\;\; \neq \\ 3 + x = 2 & x = (3, 2) \end{array}\right\} \text{bedeutet die gleiche Zahl „} x = -1 \text{"}$$

Wie lösen wir das Problem?

– Was ist, wenn es schon eine Lösung $x \in \mathbb{N}$ gibt?

$$\left.\begin{array}{l} 1 + x = 3 \\ 2 + x = 4 \end{array}\right\} x = 2 \in \mathbb{N} \quad \begin{array}{l} \text{oder } x = (1, 3) \\ \text{oder } x = (2, 4) \end{array}$$

Verschiedene Paare (a, b) repräsentieren die gleiche Zahl!

Manche Paare repräsentieren bekannte Zahlen aus $\mathbb{N}$!

(26) **Lösung: Äquivalenzklassen!**

Idee: Wenn $a+x=b$ und $a'+x=b'$ die gleiche Lösung haben, dann sind (a,b) und (a',b') äquivalent.

$$\left[\left.\begin{array}{l} a+x=b \iff x=b-a \\ a'+x=b' \iff x=b'-a' \end{array}\right\} \iff b'-a'=b-a \iff b'+a=b+a'\right]$$

Def: Für $(a,b)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ und $(a',b')\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ def.

$$(a,b)\sim(a',b') :\iff (b'+a=b+a')$$

$$[(a,b)]=\{(a',b')\mid(a',b')\sim(a,b)\}$$

Anschaulich: Alle $(a',b')\in[(a,b)]$ repräsentieren dieselbe Zahl.

Def: $\mathbb{Z}=\{[(a,b)]\mid(a,b)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}\}$

27 Warum ist $\mathbb{Z}$ eine Erweiterung von $\mathbb{N}$?

Wir müssen $\mathbb{N}$ in $\mathbb{Z}$ „wiederfinden?"

__Bem__ „$\sim$" ist Äquivalenzrelation (ohne Beweis)

__Beobachtung__ $[(1,3)] = [(2,4)] = [(0,2)]$

repräsentieren $3-1 = 4-2 = 2-0 = 2$

Allgemein: Sei $n \in \mathbb{N}$, dann identifizieren wir n mit $[(0,n)] \in \mathbb{Z}$

Ist $n \in \mathbb{N}$, $m \in \mathbb{N}$, $n \neq m$, so gilt

$0+n = n \neq m = m+0$, also

$(0,n) \nsim (0,m)$ und somit $[(0,n)] \neq [(0,m)]$

Verschiedene $n, m \in \mathbb{N}$ führen zu verschiedenen $[(0,n)]$ und $[(0,m)]$ aus $\mathbb{Z}$.

(28) $\Rightarrow$ Die Abbildung

$\mathbb{N} \ni n \mapsto [(0,n)] \in \mathbb{Z}$

ist injektiv.

$[(0,n)] \hat{=} n$

$[(n,0)] \hat{=} -n$

$\mathbb{N}$	$\mathbb{Z}$	anschaulich
	$[(2,0)] = \{(2,0),(3,1),(4,2),\dots\}$	$-2 = 0-2 = 1-3 = 2-4 \dots$
	$[(1,0)] = \{(1,0),(2,1),(3,2),\dots\}$	$-1 = 0-1 = 1-2 = 2-3$
0	$[(0,0)] = \{(0,0),(1,1),(2,2),\dots\}$	$0 = 0-0 = 1-1 = \dots$
1	$[(0,1)] = \{(0,1),(1,2),(2,3),\dots\}$	$1 = 1-0 = 2-1 = 3-2$
2	$[(0,2)] = \{(0,2),(1,3),(2,4),\dots\}$	$2 = 2-0 = 3-1 = 4-2$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

(2) Im Folgenden schreiben wir für $[(0,n)] \in \mathbb{Z}$ einfach $n \in \mathbb{N}$
und für $[(n,0)] \in \mathbb{Z}$ einfach $-n$

Wie rechnen wir in $\mathbb{Z}$?

$$\left[\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} x = [(x_1,x_2)] \Leftrightarrow x = x_2 - x_1 \\ y = [(y_1,y_2)] \Leftrightarrow y = y_2 - y_1 \end{array}\right\} \quad \begin{aligned} x+y &= (x_2 - x_1) + (y_2 - y_1) \\ &= (x_2 + y_2) - (x_1 + y_1) \\ x+y &= [(x_1+y_1, x_2+y_2)] \end{aligned} \end{array}\right]$$

<u>Def 4</u> Seien $x = [(x_1,x_2)], y = [(y_1,y_2)] \in \mathbb{Z}$. Setze dann
$$x + y := [(x_1+y_1, x_2+y_2)] \in \mathbb{Z}.$$

<u>Lemma 5</u> a) Die Addition auf $\mathbb{Z}$ ist wohldef
b) und verträglich mit $\mathbb{N}$

<u>Beweis</u> a) Übung | b) Seien $n, m \in \mathbb{N}$, d.h. $n \hat{=} [(0,n)]$, $m \hat{=} [(0,m)]$
und $n+m \hat{=} [(0,n+m)]$. $\square$