

(30) Erinnerung $[(a, b)] = \{(a', b') \mid a + b' = a' + b\}$, $= b - a$ "

$$\mathbb{Z} := \{[(a, b)] \mid (a, b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}\}$$

$$x = [(x_1, x_2)], \quad y = [(y_1, y_2)]$$

$$x + y = \underbrace{[(x_1, x_2)] + [(y_1, y_2)]}_{[(x_2 - x_1) + (y_2 - y_1)]} = [(x_2 + y_2) - (x_1 + y_1)]$$

Satz 6 $(\mathbb{Z}, +)$ ist eine abelsche Gruppe mit $0 = [(0, 0)]$
und wir können $(\mathbb{N}, +)$ mit einer Teilmenge von $(\mathbb{Z}, +)$
identifizieren.

Beweis Übung Hinweis $[(a, b)] + [(b, a)] \stackrel{!}{=} [(0, 0)]$

(37) Def 7 Multiplikation in $\mathbb{Z}$

$$(1) \quad x \cdot 0 := 0 \quad \forall x \in \mathbb{Z}$$

$$(2) \quad x \cdot (y+1) := x \cdot y + x \quad \forall x \in \mathbb{Z}, y \in \mathbb{N}$$

$$(3) \quad x \cdot (-y) := -(x \cdot y) \quad \forall x \in \mathbb{Z}, y \in \mathbb{N}$$

Bemerkung - " $\cdot$ " auf ganz $\mathbb{Z}$ wohl def. $\cdot : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ (ohne Beweis)

- assoziativ und kommutativ

- $1 = [(0, 1)]$ ist das neutrale Element von " $\cdot$ ", d.h.

$$x \cdot 1 = x \cdot (0 + 1) = x \cdot 0 + x = 0 + x = x$$

- Problem keine inversen Elemente x^{-1} mit $x \cdot x^{-1} = 1$

32) Lösung: Äquivalenzklassen!

Idee Wenn $a \cdot x = b$ und $a' \cdot x = b'$ die gleiche Lösung
"haben" sollen, müssen (a, b) und (a', b') äquiv. sein.

anschaulich $\left[\begin{array}{l} a \cdot x = b \Rightarrow x = \frac{b}{a} \\ a' \cdot x = b' \Rightarrow x = \frac{b'}{a'} \end{array} \right] \Rightarrow \frac{b'}{a'} = \frac{b}{a} \Rightarrow b' \cdot a = b \cdot a'$

Def: $(a, b) \sim (a', b') \Leftrightarrow a \cdot b' = a' \cdot b$
 $[(a, b)] = \left\{ (a', b') \mid (a, b) \sim (a', b') \right\} \stackrel{\text{anschaulich}}{=} \frac{b}{a}$

Def $\mathbb{Q} := \left\{ [(a, b)] \mid b \in \mathbb{Z}, a \in \mathbb{Z} \setminus \{0\} \right\} \stackrel{\text{anschaulich}}{=} \left\{ \frac{b}{a} \mid \dots \right\}$

$\nearrow$ Nenner
 $\nearrow$ Zähler

(39) Als hier gleiches Vorgehen mit „ $\circ$ “ wie parit „ $+$ “

$\mathbb{Q}$ ist eine Erweiterung von $\mathbb{Z}$

$$\mathbb{Z} \ni x \mapsto [(1, x)] \in \mathbb{Q} \quad \text{„} x = \frac{x}{1} \text{“}$$

ist injektiv

$$x \neq y \Leftrightarrow 1 \cdot x = x \neq y = 1 \cdot y \Leftrightarrow (1, x) \neq (1, y) \Leftrightarrow [(1, x)] \neq [(1, y)]$$

Def 8 Addition und Multiplikation in $\mathbb{Q}$ - Sei $x = [(x_1, x_2)], y = [(y_1, y_2)] \in \mathbb{Q}$

$$x + y := [(x_1 \cdot y_1, x_2 \cdot y_1 + y_2 \cdot x_1)]$$

$$x \cdot y := [(x_1 \cdot y_1, x_2 \cdot y_2)]$$

Satz 9 $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ ist ein Körper mit $0 = [(1, 0)]$

$$\text{und } 1 = [(1, 1)].$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x = \frac{x_2}{x_1} \quad y = \frac{y_2}{y_1} \\ x + y = \frac{x_2 y_1 + y_2 x_1}{x_1 y_1} \\ x \cdot y = \frac{x_2 \cdot y_2}{x_1 \cdot y_1} \end{array} \right.$$

Beweis (Übung?) Hinweis: $-[(a, b)] := [(a, -b)]$
 $[(a, b)]^{-1} := [(b, a)]$

(34) Def 10 $a, b \in \mathbb{N}$: $a \leq b \iff a = b$ oder $b = a + 1$ oder $a + 1 \leq b$

$a, b \in \mathbb{Z}$: $a \leq b \iff b - a \in \mathbb{N}$ (d.h. $b - a \geq 0$)

$a, b \in \mathbb{Q}$ und o.B.d.A. $a = \frac{a_2}{q}$, $b = \frac{b_2}{q}$, $a_2, b_2 \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}_{\neq 0}$

$a \leq b \iff a_2 \leq b_2$

o.B.d.A. =
ohne Beschränkung
der Allgemeinheit

ergl. u. f. o. g.

Satz 11 " $\leq$ " ist eine totale Ordnung auf $M = \mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$

d.h. a) $a \leq a$

$\forall a \in M$

(reflexiv)

b) $(a \leq b \text{ und } b \leq a) \Rightarrow (a = b)$

$\forall a, b \in M$

(antisymmetrisch)

c) $(a \leq b \text{ und } b \leq c) \Rightarrow (a \leq c)$

$\forall a, b, c \in M$

(transitiv)

d) $a \leq b$ oder $b \leq a$

$\forall a, b \in M$

(total)

Notation

$a \geq b \iff b \leq a$

$a < b \iff a \leq b \text{ und } a \neq b$

$a > b \iff a \geq b \text{ und } a \neq b$

(35) Def 12 Die Betragsfunktion $|\cdot|: \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}$ ist def. durch

$$|x| = \begin{cases} x & \text{falls } x \geq 0 \\ -x & \text{falls } x < 0 \end{cases}$$

Satz 13 Es gilt

a) $|x+y| \leq |x| + |y|$ $\forall x, y \in \mathbb{Q}$ Dreiecksungl.

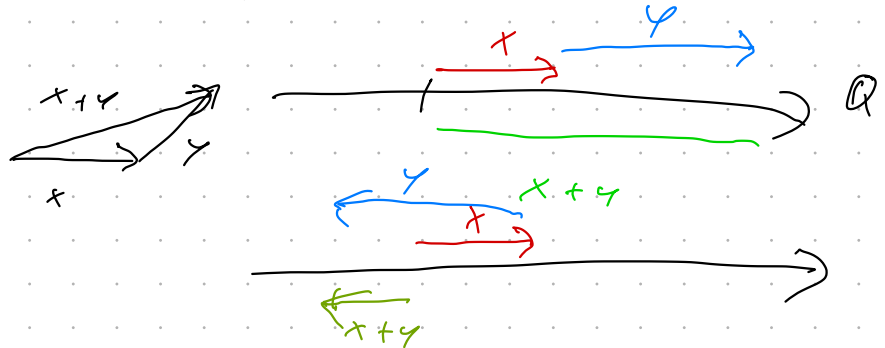
b) $|tx| = |t| \cdot |x|$ $\forall t, x \in \mathbb{Q}$ (positiv, t -fachen)

c) $|x| = 0 \Rightarrow x = 0$ $\forall x \in \mathbb{Q}$ (definit)

Beweis Übung

Anschaulich $|x| \hat{=}$ Länge von x

$|x-y|$ Abstand
von x und y



(56) Def 14 Sei M eine Menge. Eine Abbildung $a: \mathbb{N} \rightarrow M$ heißt Folge (in M). Wir schreiben

$$(a_n)_{n \in \mathbb{N}} = (a_n) \quad \text{und} \quad a_n = a(n)$$

Def 15 Eine Folge (a_n) in $\mathbb{Q}$ (in $\mathbb{R}$) heißt konvergent gegen $a \in \mathbb{Q}$ (in $\mathbb{R}$), falls gilt:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} : |a_n - a| < \varepsilon \quad \forall n \geq n_0.$$

Wir schreiben dann $a_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} a$.

Falls $a_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$, dann heißt (a_n) eine Nullfolge.