§7 **Bedeutung**:
- $|x|$ „Länge von x"
- $|x-y|$ „Abstand von x und y"
- $a_n \xrightarrow{n\to\infty} a$ Egal wie klein wir $\varepsilon > 0$ wählen, es ex. immer ein Folgenglied a_{n_0}, sodaß alle weiteren Abstand $< \varepsilon$ zu a haben.

Beispiel $a_n := \frac{1}{n}$, dann gilt $a_n \xrightarrow{n\to\infty} 0$.

(*) $\varepsilon > 0, \varepsilon \in \mathbb{Q}: \varepsilon = \frac{p}{q}, \; p, q \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$

$0 < \frac{1}{\varepsilon} = \frac{q}{p} < \overbrace{q+1}^{n_0}$

Beweis: Sei $\varepsilon > 0$. Dann gilt $0 < \frac{1}{\varepsilon}$ und es ex. ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $\frac{1}{\varepsilon} < n_0$ (wegen (*)). Somit gilt $a_{n_0} = \frac{1}{n_0} < \varepsilon$.

Also gilt

$$|a_n - 0| = |a_n| = \left|\frac{1}{n}\right| = \frac{1}{n} \le \frac{1}{n_0} < \varepsilon \quad \forall n \ge n_0.$$

$\square$

(38) <u>Lemma 16</u> Seien (a_n), (b_n) Folgen in $\mathbb{Q}$ (in $\mathbb{R}$) mit

$a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} a$, $b_n \xrightarrow[n\to\infty]{} b$. Dann gilt:

a) $a_n + b_n \xrightarrow[n\to\infty]{} a+b$

b) $a_n \cdot b_n \xrightarrow[n\to\infty]{} a \cdot b$

c) $a_n - b_n \xrightarrow[n\to\infty]{} a - b$

d) Falls $b_n \neq 0 \ \forall n$, $b \neq 0$:

$$\frac{a_n}{b_n} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{a}{b}.$$

<u>Beweis</u> a) Sei $\varepsilon > 0$. Dann ex. ein $n_{0,a} \in \mathbb{N}$ und $n_{0,b} \in \mathbb{N}$

$$|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2} \qquad \forall n \geq n_{0,a}$$

$$|b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2} \qquad \forall n \geq n_{0,b}$$

Also gilt $n_0 = \max\{n_{0,a}, n_{0,b}\}$ und $n \geq n_0$

$$|(a_n + b_n) - (a+b)| = |(a_n - a) + (b_n - b)| \leq |a_n - a| + |b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

b), c) d) $\rightarrow$ Übung

39 **Lemma 17** Sei (a_n) Folge in $\mathbb{Q}$ (in $\mathbb{R}$) mit $a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} a \in \mathbb{Q}$ und $a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} a' \in \mathbb{Q}$. Dann gilt $a = a'$!

D.h. der Grenzwert ist eindeutig bestimmt.

(Wir schreiben $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$)

Beweis Es gilt $0 = a_n - a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} a - a'$ (wegen Lemma 16)

Ang. $a \neq a'$. Sei $\varepsilon := |a - a'| > 0$. Dann ex. $n_0 \in \mathbb{N}$

mit $|(a_n - a_n) - (a - a')| = |a - a'| < |a - a'|$ $\lightning$ $\boxed{\Rightarrow a = a'}$ $\square$

Satz 18 Sei (a_n) eine Folge in $\mathbb{Q}$ mit $a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} a$.

Dann gilt

(*) $\forall \varepsilon > 0 \; \exists n_0 \in \mathbb{N}: \; |a_n - a_m| < \varepsilon \;\; \forall n, m \geq n_0$.

(40) (*) $\forall \varepsilon > 0 \; \exists n_0 \in \mathbb{N} : |a_n - a_m| < \varepsilon \quad \forall n, m \geq n_0.$

<u>Beweis</u>: Sei $\varepsilon > 0$. Dann ex. $n_0 \in \mathbb{N}$ mit

$$|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \forall n \geq n_0.$$

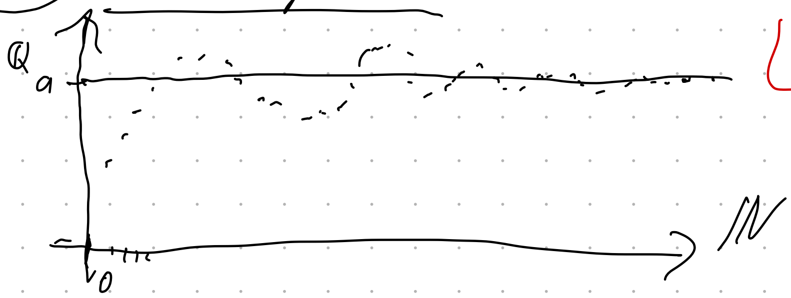
Also gilt für $n, m \geq n_0$

$$|a_n - a_m| = |(a_n - a) - (a_m - a)|$$
$$\leq |a_n - a| + |a_m - a| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

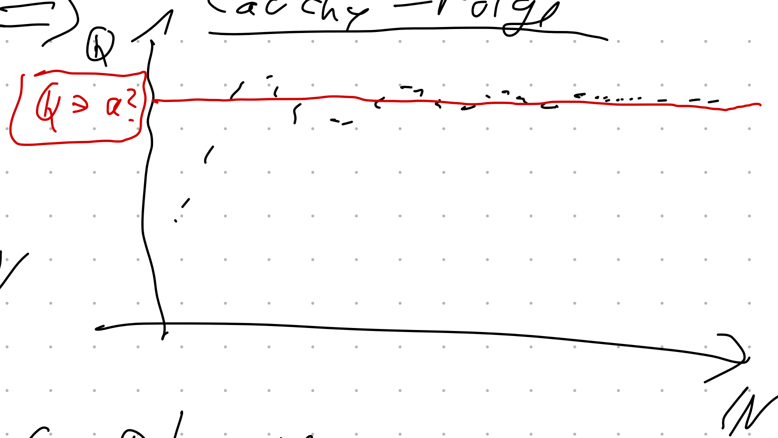
<u>Anschaulich</u> (*) bedeutet

Egal wie klein wir $\varepsilon > 0$ wählen, es ex. immer ein Folgenglied a_{n_0}, so dass der Abstand aller weiteren Folgenglieder <u>untereinander</u> kleiner als ε ist.

4.1 Konvergenz



$\Rightarrow$ Cauchy-Folge



Def 19 Eine Folge in $\mathbb{Q}$ (in $\mathbb{R}$) mit

(*) $\forall \varepsilon > 0 \; \exists n_0 \in \mathbb{N} : |a_n - a_m| < \varepsilon \;\; \forall n, m \geq n_0$

heißt Cauchy-Folge.

Satz 18 sagt, dass jede konv. Folge eine Cauchy-Folge (CF) ist.

Gilt die Umkehrung?

42 **Satz 20** $(a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} a) \Rightarrow (a_n)$ ist CF

Beweis Satz 18

Beispiel: sei $a_0 = 1$, $a_{n+1} := \frac{a_n}{2} + \frac{1}{a_n} = \frac{a_n + \frac{2}{a_n}}{2}$

ohne Beweis: (a_n) ist CF.

Ang $a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} a \in \mathbb{Q}$. Setze $b_n := a_{n+1}$, dann $b_n \xrightarrow[n\to\infty]{} a$

Also $a_n \cdot b_n \xrightarrow[n\to\infty]{} a \cdot a = a^2$

aber wir wissen auch

$$a_n \cdot b_n = a_n \cdot \left(\frac{a_n + \frac{2}{a_n}}{2} \right) = \frac{a_n^2 + 2}{2} \to \frac{a^2+2}{2}.$$

$$\Rightarrow a^2 = \frac{a^2+2}{2} \Rightarrow 2a^2 = a^2 + 2 \Rightarrow a^2 = 2$$

(43) Falls $a \in \mathbb{Q}$, können wir $a = \frac{p}{q}$ schreiben.

O.B.d.A. sei dieser Bruch soweit es geht gekürzt, also p und q sind nicht beide gerade (sonst kürze 2)

Dann gilt

$$2 = a^2 = a \cdot a = \frac{p \cdot p}{q \cdot q} = \frac{p^2}{q^2} \Rightarrow p^2 = 2q^2.$$

$\Rightarrow p^2$ gerade $\Rightarrow$ p gerade $\Rightarrow p = 2p' \Rightarrow p^2 = (2p')^2 = 4(p')^2 = 2q^2$

$\Rightarrow 2(p')^2 = q^2 \Rightarrow q^2$ gerade $\Rightarrow$ q gerade ↯

Also war $a = \frac{p}{q}$ nicht gekürzt.

Es ex. keine Zahl $a \in \mathbb{Q}$ mit $a^2 = 2$ (bzw. $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$).

In $\mathbb{Q}$ konvergieren CF i.A. nicht.

In Satz 20 gilt nicht „$\Leftarrow$".

(„... weil u.U. der Grenzwert in $\mathbb{Q}$ fehlt").

(44) Konstruiere Grenzwerte durch Äquivalenzklassen!

Sei $\mathcal{R} = \{ (a_n) \mid (a_n) \text{ ist CF in } \mathbb{Q} \}$

Ansatz $(a_n) \sim (b_n)$ falls (a_n) und (b_n) „gegen die gleiche Zahl a konvergieren würden"

Def Für CFen $(a_n), (b_n) \in \mathcal{R}$ def

$$(a_n) \sim (b_n), \text{ falls } a_n - b_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

$$[(a_n)] = \{ (b_n) \in \mathcal{R} \mid (a_n) \sim (b_n) \} = \{ (b_n) \in \mathcal{R} \mid a_n - b_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \}.$$

$$\mathbb{R} := \{ [(a_n)] \mid (a_n) \in \mathcal{R} \}.$$

45 **Lemma 21** Seien $(a_n), (b_n)$ CF in $\mathbb{Q}$, dann gilt

a) $(a_n + b_n)$ ist CF | c) $(a_n - b_n)$ ist CF

b) $(a_n \cdot b_n)$ ist CF | d) Falls $b_n \neq 0 \; \forall n$ und $b_n \not\to_{n\to\infty} 0$ dann ist $\left(\frac{a_n}{b_n}\right)$ CF.

Beweis Übung

Def 22 Seien $a = [(a_n)] \in \mathbb{R}$, $b = [(b_n)] \in \mathbb{R}$, dann def.

$$a + b = [(a_n)] + [(b_n)] := [(a_n + b_n)]$$

$$a \cdot b = [(a_n)] \cdot [(b_n)] := [(a_n \cdot b_n)].$$

Satz 23 a) $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ ist ein Körper mit $0 = [(0)]$, $1 = [(1)]$, $-a = [(-a_n)]$, $a^{-1} = [(a_n^{-1})]$"

b) Wir können $\mathbb{Q}$ als Teilmenge identifizieren.

(46) <u>Beweis</u> a) lassen wir aus <u>Hinweis</u> $(a^{-1})_n = \begin{cases} a_n^{-1} & \text{falls } a_n \neq 0 \\ 1 & \text{sonst} \end{cases}$

für $a_n \underset{n\to\infty}{\not\to} 0$

b) Sei $a \in \mathbb{Q}$. Def. dann

$[(a_n)] \in \mathbb{R}$ durch $a_n = a \quad \forall n \in \mathbb{N}$ (*)

Dann gilt für $a \neq b \in \mathbb{Q}$

$a \neq b \Rightarrow a - b \neq 0 \Rightarrow a_n - b_n = a - b \neq 0$

$\Rightarrow a_n - b_n \xrightarrow[n\to\infty]{} a - b \neq 0 \Rightarrow (a_n) \not\sim (b_n)$

$\Rightarrow [(a_n)] \neq [(b_n)]$.

Also ist

$\mathbb{Q} \ni a \mapsto [(a_n)] \in \mathbb{R}$ mit (*) injektiv.

$\square$