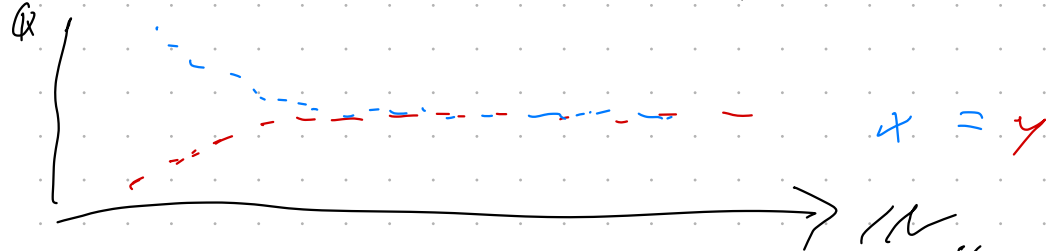
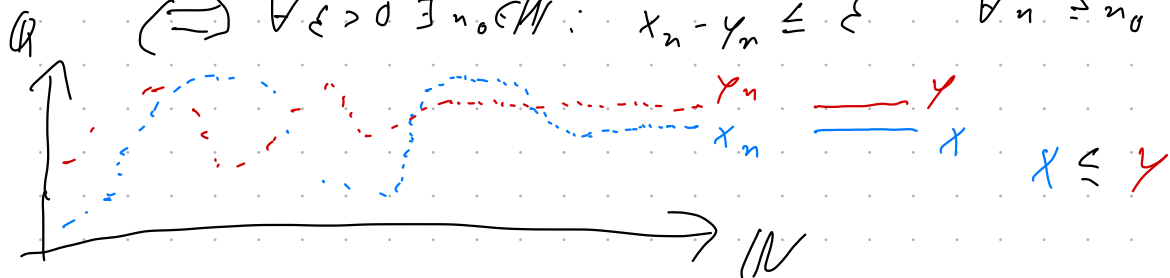


(47) Def 24 Für $x = [(x_n)]$, $y = [(y_n)] \in \mathbb{R}$

$$x \leq y \Leftrightarrow [(x_n)] \leq [(y_n)]$$

$$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} : x_n \leq y_n + \varepsilon \quad \forall n \geq n_0$$

$$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} : x_n - y_n \leq \varepsilon \quad \forall n \geq n_0$$



Lemma 25 $x \leq y$ ist wohl. def. Beweis Übung

Satz 26 " $\leq$ " ist eine totale Ordnung auf $\mathbb{R}$. Beweis Übung

(4P) Bem „+“, „ $\cdot$ “, „0“, „1“, „ $\leq$ “ sind verträglich mit $\mathbb{Q}$

Lemma 2.7 $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in $\mathbb{Q}$ sind beschränkt.

Insbesondere ex. für $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in $\mathbb{Q}$

ein $N \in \mathbb{N}$ mit $-N \leq a_n \leq N \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

Beweis Übung

Satz 2.8 $\mathbb{R}$ ist ein archimedisch geordneter Körper,
d.h. $\mathbb{R}$ ist mit $\leq$ geordnet und

$\forall x \in \mathbb{R} \exists N \in \mathbb{N} : x \leq N$.

Beweis

Sei $x = [(x_n)] \in \mathbb{R}$ und die $(F(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$ in $\mathbb{Q}$ ein
Repräsentant von x . Dann ist (x_n) beschränkt,
d.h. es ex $N \in \mathbb{N}$ mit $x_n \leq N \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

Somit gilt $(\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} : x_n \leq N_n + \varepsilon \quad \forall n \geq n_0 \text{ mit } N_n = N)$
 $x \leq N$.

□

- Ü9 Korollar 29
- a) $\forall x \in \mathbb{R} \exists! N \in \mathbb{N}_n$ mit $N-1 < x \leq N$. $\lceil x \rceil := N$
 - b) $\forall x \in \mathbb{R} \exists! M \in \mathbb{N}_m$ mit $M \leq x < M+1$. $\lfloor x \rfloor := M$
 - c) $\forall x, y \in \mathbb{R}, 0 < x < y \exists n \in \mathbb{N}$ mit $y < nx$
 - d) $\forall x, y \in \mathbb{R}, x < y \exists q \in \mathbb{Q}$ mit $x < q < y$

Beweis
Def 30

(Übung)

Sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in M und $(n_k)_{k \in \mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{N}$ mit $n_{k+1} > n_k \forall k \in \mathbb{N}$. Dann heißt $(a_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ eine Teilfolge (TF) von (a_n) .

$$\begin{array}{lcl}
 a_n & a_1, & \underline{a_2}, \underline{a_3}, a_4, \underline{a_5}, \underline{a_6}, \dots \\
 n_k & 2, & 3, 5, 6, \dots \\
 a_{n_k} & a_2, & a_3, a_5, a_6, \dots
 \end{array}$$

(30) Def 3.1 Def 1.1: $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ durch $|x| = \begin{cases} x & 0 \leq x \\ -x & 0 > x \end{cases}$

Satz 3.2 Die Eigenschaften von $| \cdot |$ aus Satz 1.3 gelten auch auf $\mathbb{R}$.
Beweis Übung

Erinnerung Sei $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ Folge in $\mathbb{R}$.

Konvergenz $x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} x \in \mathbb{R}$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} : |x_n - x| < \varepsilon \quad \forall n \geq n_0$$

Cauchy-Folge

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} : |x_n - x_m| < \varepsilon \quad \forall n, m \geq n_0$$

Beschränktheit

$$\exists C \in \mathbb{R} : |x| \leq C \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

(oder $C \in \mathbb{N}$)

Achtung:

Zuletzt heißt
" $\forall \varepsilon > 0$ "

" $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0$ "

(57)

Wegen Satz 28 können wir statt

$$" \forall \varepsilon > 0 \quad A < \varepsilon "$$

auch

$$" \forall k \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \quad A < \frac{1}{k} " \text{ schreiben,}$$

denn zu $\varepsilon > 0$ können wir $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ finden mit $k \geq \frac{1}{\varepsilon}$
(z.B. $k = \lceil \frac{1}{\varepsilon} \rceil$) - Dann gilt $A < \frac{1}{k} \leq \varepsilon$.

Lemma 16 gilt auch für Folgen in $\mathbb{R}$ (+, -, ·, : von Grenzwerten)

Lemma 17 — " — (Eindeutigkeit von Grenzwerten)

Satz 20 — " — ((x_n) konv. $\Rightarrow (x_n)$ CF)

Satz 33 Sei $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine CF in $\mathbb{R}$. Dann ex. ein
 $x \in \mathbb{R}$ mit $x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} x \in \mathbb{R}$.

(52) Lemma 34 Sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset F$ in $\mathbb{Q}$ oder $\mathbb{R}$ und $(a_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ eine TF.

Dann ist $(a_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ auch CF und es gilt

$$a_k - a_{n_k} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0. \text{ (insbesondere gilt in } \mathbb{Q})$$

$$[(a_n)_{n \in \mathbb{N}}] = [(a_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}].$$

Beweis (Übung)

Beweis (Satz 33) Sei $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine CF in $\mathbb{R}$. Zeige dass $x_n \in \mathbb{R}$ ex. also eine CF $(x_{n_i})_{i \in \mathbb{N}}$ in $\mathbb{Q}$ (d.h. $x_{n_i} \in \mathbb{Q}$) mit $x_n = [(x_{n_i})_{i \in \mathbb{N}}]$



(53)

$$x_0 = [(\underline{x_{0,0}}, x_{0,1}, x_{0,2}, \dots)] = [(x_{0,i})_{i \in \mathbb{N}}]$$

$$x_1 = [(x_{1,0}, \underline{x_{1,1}}, x_{1,2}, \dots)]$$

$$x_2 = [(x_{2,0}, x_{2,1}, \underline{x_{2,2}}, \dots)]$$

$\vdots$

$\vdots$

$\ddots y_i$

Ziel: $y = [(y_0, y_1, y_2, \dots)]$

Verüberlegung: O.B.d.A. ex. für jedes $n \in \mathbb{N}$ ein Reprr^a existiert

$(x_{n,i})_{i \in \mathbb{N}}$ von $x_n = [(x_{n,i})_{i \in \mathbb{N}}]$ mit

$$\forall k \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \quad |x_{n,i} - x_{n,j}| < \frac{1}{4k} \quad \forall i, j \geq k \quad (1)$$

Sonst wähle TF v. d. besagte Lemma 34.

(59) Sei nun $y_i = x_{i,i} \in \mathbb{Q}$ für $i \in \mathbb{N}$. (ist Diagonalfolge)

Wir werden zeigen

(I) $(z_i)_{i \in \mathbb{N}}$ ist CF in $\mathbb{Q}$.

(II) $x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \gamma$ wobei $\gamma = [(y_i)_{i \in \mathbb{N}}]$

(I) Sei $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Dann gilt $\forall n$ $|x_{n,i} - x_{n,j}| < \frac{1}{4k} \forall i, j \geq k$
Also gilt für $i \geq k$ auch

$$\underbrace{\underbrace{x_{n,i}}_{\in \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}} - \underbrace{x_n}_{\in \mathbb{R}}}_{\in \mathbb{R}} < \frac{1}{4k} \in \mathbb{Q}$$

Außer den ex. ein $n'_0 \in \mathbb{N}$ mit $\left. \begin{array}{l} |x_n - x_m| < \frac{1}{4k} \quad \forall n, m \geq n'_0 \\ \in \mathbb{R} \end{array} \right\} \text{ Da } (x_n) \text{ CF in } \mathbb{R}.$

(55) Für $n_0 = \max\{n'_0, k\}$ gilt dann $\forall n, m \geq n_0$

$$\begin{aligned}
 (2) \quad & \left\{ \begin{aligned} |y_n - y_m| &= \underbrace{|x_{n,n} - x_{m,m}|}_{\in \mathbb{Q}} = \underbrace{|x_{n,n} - x_n + x_n - x_m + x_m - x_{m,m}|}_{\in \mathbb{R}} \\ &\leq \underbrace{|x_{n,n} - x_n|}_{\substack{\in \mathbb{R} \\ 1/n \text{ (da } n \geq k)}} + \underbrace{|x_n - x_m|}_{\substack{\in \mathbb{R} \\ 1/n}} + \underbrace{|x_{m,m} - x_m|}_{\substack{\in \mathbb{R} \\ 1/m \text{ (da } m \geq k)}} \\ &< \frac{1}{4k} + \frac{1}{4k} + \frac{1}{4k} = \frac{3}{4} \frac{1}{k} \leq \frac{1}{4} \end{aligned} \right.
 \end{aligned}$$

Also ist (y_n) C.F.

(II) Sei $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. z.z. $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ mit

$$(*) \quad |x_n - y| < \frac{1}{k} \quad \forall n \geq n_0$$

Wir wählen $n_0 \geq k$ wie oben und nehmen $n \geq n_0$ an.

(56) Für (*) müssen wir zeigen:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists i_0 \in \mathbb{N} : |x_{n,i} - y_i| < \frac{1}{k} + \varepsilon \quad \forall i \geq i_0$$

Sei $i_0 = n_0 \geq k$. Dann gilt für $i \geq i_0$

$$\begin{aligned} |x_{n,i} - y_i| &= |x_{n,i} - x_{i,i}| \leq \underbrace{|x_{n,i} - x_{n,n}|}_{< \frac{1}{4k}} + \underbrace{|x_{n,n} - x_{i,i}|}_{\frac{3}{4} \cdot \frac{1}{k} = \frac{1}{k}} \\ &\quad \text{wegen (1) und } n,i \geq n_0 \geq k \quad \text{wegen (2) und } n,i \geq n_0. \end{aligned}$$

Also gilt für $n \geq n_0$.

$$|x_n - y| < \frac{1}{k}$$



In $\mathbb{R}$ konvergieren alle CFen.

Diese Eigenschaft von $\mathbb{R}$ heißt Vollständigkeit