

(57) Erinnerung: In $\mathbb{Q}$ und $\mathbb{R}$ gilt: (a_n) konvergent $\Rightarrow (a_n)$ Cauchy-Folge
 In $\mathbb{R}$ gilt: (a_n) Cauchy-Folge $\Rightarrow (a_n)$ konvergent

Def 35 (Intervalle) Sei $a \leq b$ (Konvention $-\infty < x < \infty \forall x \in \mathbb{R}$)

$$(a, b) := \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\} \quad a, b \in \mathbb{R} \cup \{\infty, -\infty\}$$

$$[a, b] := \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\} \quad a, b \in \mathbb{R}$$

$$(a, b] := \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\} \quad a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}, b \in \mathbb{R}$$

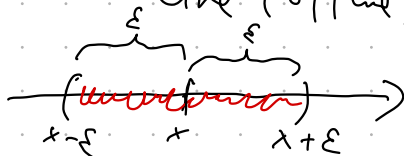
$$[a, b) := \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\} \quad a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$$

Für ein Intervall I setze $\text{diam}(I) := b - a$

Def 36 (ε -Umgebung / Kugel(n)) Sei $\varepsilon > 0$ und $x \in \mathbb{R}$, dann sei $B_\varepsilon(x)$

$$B_\varepsilon(x) := (x - \varepsilon, x + \varepsilon) = \{y \in \mathbb{R} \mid x - \varepsilon < y < x + \varepsilon\} = \{y \in \mathbb{R} \mid |x - y| < \varepsilon\}$$

eine (offene) ε -Umgebung von x mit Radius ε .



(in Form $U_\varepsilon(x)$)

(58) Bemerkung • $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} : a_n \in B_\varepsilon(a) \quad \forall n \geq n_0$

• (a_n) beschränkt $\Leftrightarrow \exists r \in \mathbb{R} : a_n \in B_r(0)$

Def 37 Sei (x_n) eine Folge in $\mathbb{R}$. Dann heiß (x_n)

a) monoton wachsend $\Leftrightarrow (k > n) \Rightarrow (x_k \geq x_n) \quad \forall n, k \in \mathbb{N}$

b) monoton fallend $\Leftrightarrow (k > n) \Rightarrow (x_k \leq x_n) \quad \forall n, k \in \mathbb{N}$

c) streng monoton wachsend $\Leftrightarrow (k > n) \Rightarrow (x_k > x_n) \quad \forall n, k \in \mathbb{N}$

d) " " fallend $\Leftrightarrow (k > n) \Rightarrow (x_k < x_n) \quad \forall n, k \in \mathbb{N}$

e) divergent, wenn (x_n) nicht konvergiert.

(59) Lemma 9.38 Seien $(a_n), (b_n)$ konvergente Folgen in $\mathbb{R}$ mit
 $a_n \leq b_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$, dann $\lim a_n \leq \lim b_n$.

Beweis Wir betrachten $c_n = b_n - a_n \geq 0$. Dann gilt

$$c := \lim c_n = \lim b_n - \lim a_n, \quad \text{z.z. } c \geq 0.$$

Aus $c < 0$. Wähle dazu $\varepsilon = -c > 0$. Dann gilt
es. ex. $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $|c_n - c| = |c_n + \varepsilon| < \varepsilon \quad \forall n \geq n_0$.

Insbes. $-\varepsilon < \underbrace{c_{n_0} - c}_{c_{n_0} - c} < \varepsilon = -c \quad \xrightarrow{\quad} \quad c_{n_0} < 0 \quad \text{☹}$

Korollar Sei $A, B \in \mathbb{R}$ und (a_n) eine konv. Folge in $\mathbb{R}$ mit
 $A \leq a_n \leq B \quad \forall n \in \mathbb{N}$, dann gilt $A \leq \lim a_n \leq B$.

Achtung Es gilt i. Ausicht: $(a_n < b_n) \Rightarrow (\lim a_n < \lim b_n)$

Bsp $a_n = 0, b_n = \frac{1}{n}$, dann $a_n < b_n$ aber $\lim b_n = 0 = \lim a_n$.

(60) Def 39 Sei (a_n) eine Folge in $\mathbb{R}$. Dann def.

$$a_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty \Leftrightarrow \lim a_n = \infty \Leftrightarrow \forall K \in \mathbb{R} \exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ mit } a_n > K \forall n \geq n_0$$

und

$$a_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} -\infty \Leftrightarrow \lim a_n = -\infty \Leftrightarrow \lim (a_n) = \infty$$

Bem $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \pm \infty \Rightarrow (a_n)$ unbeschränkt $\Rightarrow (a_n)$ divergiert

Satz 40 Es gelte $\lim a_n = +\infty$ (oder $-\infty$). Dann ex. $n_0 \in \mathbb{N}$ mit
 $a_n \neq 0 \forall n \geq n_0$ und $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{a_n} = 0$.

Beweis Sei $\varepsilon > 0$. Dann ex. zu $K = \frac{1}{\varepsilon} \in \mathbb{R}$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit

$$a_n > K = \frac{1}{\varepsilon} > 0 \quad \forall n \geq n_0 \text{ und somit}$$

$$-\varepsilon < 0 < \frac{1}{a_n} < \varepsilon, \text{ also } \left| \frac{1}{a_n} \right| < \varepsilon \quad \forall n \geq n_0 \quad \square$$

6.1 Satz 4.1 Sei (a_n) eine Nullfolge mit $a_n > 0$ (bzw. $a_n < 0$) $\forall n \in \mathbb{N}$.

Dann gilt $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{a_n} = \infty$ (bzw. $-\infty$)

Beweis (Übung)

Erinnerung $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ Folge in $\mathbb{R}$ und $(n_k)_{k \in \mathbb{N}}$ in $\mathbb{N}$ mit $n_{k+1} > n_k$.

Dann $(a_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ Teilfolge (TF) von $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$

Def 4.2 Sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ Folge in $\mathbb{R}$. Dann heißt $a \in \mathbb{R}$ Häufungspunkt

(HP) von $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, wenn eine TF $(a_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ ex.

mit $\lim_{k \rightarrow \infty} a_{n_k} = a$

Bsp a) (a_n) konvergiert $\Rightarrow a = \lim a_n$ ist einziger HP

b) $a_n = (-1)^n$ hat HPs 1 und -1 

c) $a_n = (-1)^n + \frac{1}{n}$ hat HPs 1 und -1

(63) Satz 2.44 Jede beschränkte, monoton Folge konvergiert.

Beweis (später)

Übersicht: Plan
Axiomatische Einführung von $\mathbb{N}$

Forster
1

Konstruktion $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$

(nur axiomatisch 2, 3)

Folgen, Grenzwerte

4

Vollständigkeit von $\mathbb{R}$

5

[Wurzeln]

6

Jetzt Reihen (unendliche Summen)

4, 7, 8

Sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{R}$. Dann ist die zugehörige Reihe

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ anschaulich die unendliche Summe $a_0 + a_1 + a_2 + \dots$

69 Formal : Zu (a_n) betrachte für jedes $m \in \mathbb{N}$
die Partiellsumme $s_m = \sum_{n=0}^m a_n = a_0 + a_1 + \dots + a_m$

Wir sagen, die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ konvergiert, wenn s_m konvergiert und schreiben dann

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n := \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^m a_n = \lim_{m \rightarrow \infty} s_m \in \mathbb{R}.$$

Das s_m Sol $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ wird doppelt verwendet

- formal die Folge der Partiellsummen
- Wert des Grenzwerts

(65) Bsp

$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n}$	$\left. \begin{array}{l} \text{Harmonische Reihe} \\ \text{divergiert} \end{array} \right\}$	$\sum_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{1}{1-q}$	geom. Reihe konv. falls $ q < 1$	
$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2}$		$\left. \begin{array}{l} \text{konvergiert} \end{array} \right\}$	$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = \exp(x)$	Exponentialreihe
$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^k}$				

Fragen:

- Wann konvergieren Reihen? $\rightarrow$ Kriterien
- Hängt die Konvergenz von Reihenfolge ab? $\rightarrow$ i.A. ja