

(78) Satz 2.52 (Majoranten-Kriterium)

Sei $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ eine konv. Reihe mit $c_n \geq 0 \ \forall n \in \mathbb{N}$
und $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ eine Reihe mit $|a_n| \leq c_n \ \forall n \in \mathbb{N}$.

Dann konv. $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ absolut.

Beweis

Sei $\varepsilon > 0$. Dann ex. ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit

$$\left| \sum_{k=m}^n c_k \right| < \varepsilon \quad \forall n \geq m \geq n_0.$$

Dann gilt auch

$$\left| \sum_{k=m}^n |a_k| \right| \leq \sum_{k=m}^n c_k = \left| \sum_{k=m}^n c_k \right| < \varepsilon \quad \forall n \geq m \geq n_0.$$

D.h. $\sum_{k=0}^{\infty} |a_k|$ erfüllt Cauchy-Kriterium

$$\Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} |a_k| \text{ konv.} \Leftrightarrow \sum_{k=0}^{\infty} a_k \text{ abs. konv.} \quad \square$$

(79) Satz 53 (Quotientenkriterium)

Sei $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ eine Reihe. Es ex. $n_0 \in \mathbb{N}$, $0 < \theta < 1$ mit

$$a_n \neq 0 \quad \forall n \geq n_0 \quad \text{und} \quad \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \leq \theta \quad \forall n \geq n_0$$

Dann konvergiert $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ absolut.

Beweis: O.B.d.A. gelte $a_n \neq 0$ und $\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \leq \theta \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

Per Induktion erhalten wir

$$|a_n| \leq \theta |a_{n-1}| \leq \theta^2 |a_{n-2}| \leq \dots \leq \overbrace{\theta^n |a_0|}^{c_n} \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Also ist die geom. Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{|a_0| \theta^n}_{c_n} = \frac{|a_0|}{1-\theta}$

eine Majorante und somit konv. $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ absolut.
(Satz 52). □

(80) Bsp $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n}$, $a_n = \frac{n^2}{2^n}$

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \frac{2^n (n+1)^2}{2^{n+1} n^2} = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^2$$

Für $n \geq 3$ gilt $\frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^2 \leq \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{3} \right)^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{16}{9} = \frac{8}{9} = \Theta < 1$

Achtung: Es reicht nicht, dass $\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| < 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Bsp $a_n = \frac{1}{n}$, $\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \frac{n}{n+1} < 1$.

§ 1 Umordnungen von Reihen

Sei $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ eine Reihe und $\tau: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ eine Bijektion (bijective Abb.). Dann heißt die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_{\tau(n)}$ eine Umordnung von $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$.

Satz 259 (Umordnungssatz 2) Sei $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ eine absolut konvergente Reihe, dann konvergiert jede Umordnung absolut gegen den gleichen Grenzwert.

(82) Bsp Die alternierende harm. Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$
konv. aber nicht absolut

Es ex. eine Umordnung, die nicht konvergiert
(Übung)

Bem Sei $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ konvergent aber nicht abs. konvergent ist.
Dann gilt

- a) Es ex. eine Umordnung, die nicht konvergiert.
- b) Es ex. eine Umordnung, die gegen $+\infty$ (bzw. $-\infty$) geht.
- c) $\forall c \in \mathbb{R}$ ex. eine Umordnung, die gegen c konvergiert.

83 Beweis Sei $A := \sum_{n=0}^{\infty} a_n$ und $\tau: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ eine Bijektion.

Z.z.: $\lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^m a_{\tau(n)} = A$.

Sei $\bar{A} = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$

Sei $\varepsilon > 0$. Dann ex. $n_0 \in \mathbb{N}$ mit

$$\left| \bar{A} - \sum_{k=0}^{n_0-1} |a_k| \right| = \sum_{k=n_0}^{\infty} |a_k| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Also gilt auch

$$\left| A - \sum_{k=0}^{n_0-1} a_k \right| = \left| \sum_{k=n_0}^{\infty} a_k \right| \leq \sum_{k=n_0}^{\infty} |a_k| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Sei N_0 groß genug, so dass $\{0, \dots, n_0-1\} \subseteq \{\tau(0), \dots, \tau(N_0)\}$

Dann gilt $\forall m \geq N_0$

$$\left| \sum_{k=0}^m a_{\tau(k)} - A \right| \leq \left| \sum_{k=0}^m a_{\tau(k)} - \sum_{k=0}^{n_0-1} a_k \right| + \underbrace{\left| \sum_{k=0}^{n_0-1} a_k - A \right|}_{< \frac{\varepsilon}{2}} < \underbrace{\sum_{k=n_0}^{\infty} |a_k|}_{< \frac{\varepsilon}{2}} + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$$

Also konv. $\sum_{k=0}^{\infty} a_{\tau(k)}$ gegen A . Anwendung auf $\sum_{k=0}^{\infty} |a_k|$ liefert abs. Konv.

□

84 Exponentialfunktion

Satz 2.55 Sei $x \in \mathbb{R}$. Dann konvergiert die Exponentialreihe

$$\exp(x) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \quad \underline{\text{absolut}}.$$

Erinnerung $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n$, $0! = 1$ (leeres Produkt)

Beweis Sei $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ und $a_n = \frac{x^n}{n!}$. Dann gilt

$$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \left| \frac{x^{n+1} n!}{(n+1)! x^n} \right| = \frac{|x|}{n+1} \leq \frac{1}{2} = \theta < 1.$$

für $n \geq 2|x|$

Nach Quotientenkriterium (Satz 2.53)
konv. Reihe absolut.

(85) Def 56 Die Funktion $\exp: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $\exp(x) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$
heißt Exponentialfunktion und

$$e := \exp(1) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \approx 2,718281828\dots$$

die Eulersche Zahl.

(86) Satz 5.7 (Cauchy-Produkt von Reihen) Sei $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ und $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$
 abs. konvergente Reihen. Dann ist das
 Cauchy-Produkt $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ mit $c_n = \sum_{k=0}^n (a_k \cdot b_{n-k})$
 absolut konvergent mit $\sum_{n=0}^{\infty} c_n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot \sum_{n=0}^{\infty} b_n$.
Beweis (siehe Forster §8, Satz 3)

Korollar 5.8 $\forall x, y \in \mathbb{R}$ gilt $\exp(x+y) = \exp(x) \cdot \exp(y)$

Beweis Sei $a_n = \frac{x^n}{n!}$, $b_n = \frac{y^n}{n!}$. Dann gilt $\binom{n}{k}$

$$c_n = \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} \cdot \frac{y^{n-k}}{(n-k)!} = \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^n \frac{n!}{k!(n-k)!} x^k y^{n-k}$$

$$\text{Binomische Lehrsatz} \rightarrow = \frac{1}{n!} (x+y)^n = \frac{(x+y)^n}{n!}$$

$$\text{Also } \exp(x+y) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+y)^n}{n!} \stackrel{\text{Satz 5.7}}{=} \exp(x) \cdot \exp(y). \quad \square$$