

87) Korollar 59

$$a) \exp(x) > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$b) \exp(-x) = \frac{1}{\exp(x)} = \exp(x)^{-1} \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$c) \exp(n) = e^n \quad \forall n \in \mathbb{Z}$$

Beweis

$$1 = \exp(0) = \exp(x-x) = \exp(x+(-x)) = \exp(x) \cdot \exp(-x).$$

$$\Rightarrow \exp(x) \neq 0$$

$$b) \frac{1}{\exp(x)} = \exp(-x)$$

$$a) \text{ Für } x \geq 0: \exp(x) \geq 1 + x + \frac{x^2}{2} \dots \geq 1 > 0$$

$$\text{Für } x < 0: \exp(x) \stackrel{b)}{=} \frac{1}{\exp(-x)} > 0, \text{ da } -x > 0$$

$$c) \text{ Induktion: } \underline{n=0} \quad \exp(0) = 1 = e^0$$

$$\underline{n \Rightarrow n+1:} \quad \exp(n+1) = \exp(n) \cdot \exp(1) = e^n \cdot e = e^{n+1} \quad \left. \vphantom{\exp(n+1)} \right\} n \in \mathbb{N}$$

$$\text{Sei nun } n \in \mathbb{Z}, n < 0: \exp(n) = \frac{1}{\exp(-n)} = \frac{1}{e^{-n}} = e^{-n} \quad \square$$

(25) Korollar 60 $\exp: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ist streng monoton wachsend,
 d.h. $x < y \Rightarrow \exp(x) < \exp(y) \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$.

Beweis (I) Seien $0 \leq x < y$. Dann gilt

$$\frac{x^n}{n!} < \frac{y^n}{n!} \quad \forall n \geq 0 \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \leq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^n}{n!} - \delta \quad \delta > 0$$

mit $\delta = y - x > 0$. Somit gilt $\exp(x) \leq \exp(y) - (y-x)$
 $< \exp(y)$.

(II) Seien nun $y < x \leq 0$. Dann gilt $-x < -y$ also 0

$$\frac{1}{\exp(x)} = \exp(-x) < \exp(-y) = \frac{1}{\exp(y)} \quad | \cdot \exp(x) \exp(y)$$

$$\Rightarrow \exp(y) < \exp(x)$$

(III) Sei $x < 0 < y$. Dann $\exp(x) \stackrel{(II)}{<} \exp(0) \stackrel{(I)}{<} \exp(y)$. □

(89)

Satz 6.7 (Restgliedabschätzung)

$$\text{Es gilt } \exp(x) = \sum_{n=0}^N \frac{x^n}{n!} + R_{N+1}(x)$$

$$\text{mit } |R_{N+1}(x)| \leq 2 \frac{|x|^{N+1}}{(N+1)!} \quad \forall x \text{ mit } |x| \leq 1 + \frac{1}{2}N.$$

Beweis (siehe Forster §8, Satz 2).

(90) b-adische Brüche

Def 62 Sei $b \in \mathbb{N}$, $b \geq 2$. Dann heißt

$$\sum_{n=-N}^{\infty} a_n b^{-n}$$

mit $N \in \mathbb{N}$ und $a_n \in \{0, 1, \dots, b-1\} \forall n$

ein (unendlicher) b-adischer Bruch zur Basis b.

Lemma 63 Sei $\sum_{n=-N}^{\infty} a_n b^{-n}$ ein b-adischer Bruch. Dann konvergiert die Reihe absolut mit

$$x = \sum_{n=-N}^{\infty} a_n b^{-n} \in \mathbb{R}.$$

D. h. alle b-adischen Brüche sind reelle Zahlen.

(99)

$$a_{-N} a_{-N-1} \dots a_{-2} a_{-1} a_0 / a_1 a_2 a_3 \dots$$

$b=10 \Rightarrow$ Dezimalbruch

Bsp $\begin{array}{ccccccc} 3 & 2 & 1 & 4 & 2 & 0 & \dots \\ \swarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & & \\ a_{-2} & a_{-1} & a_0 & a_1 & a_2 & & \end{array} = 3 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10^1 + 1 \cdot 10^0 + 4 \cdot 10^{-1} + 2 \cdot 10^{-2}$
 $= 321,42$

Bem Falls $a_n = 0 \quad \forall n > 0$, dann gilt $\sum_{n=-N}^{\infty} a_n b^{-n} \in \mathbb{N}$.

(92) Beweis O.B.d.A. $N=0$, $\sum_{n=0}^{\infty} a_n b^{-n}$ (soast kleiner b^N)

Sei $c_n = (b-1) q^n$ mit $q = \frac{1}{b} \in (0, 1)$.

$$\begin{aligned} \text{Dann gilt! } \sum_{n=0}^{\infty} c_n &= (b-1) \sum_{n=0}^{\infty} q^n \stackrel{\text{geom. Reihe}}{=} (b-1) \frac{1}{1-q} \\ &= (b-1) \frac{1}{1-\frac{1}{b}} = (b-1) \frac{b}{b-1} = b \end{aligned}$$

$$\text{und } |a_n b^{-n}| = a_n b^{-n} \leq (b-1) b^{-n} = c_n.$$

D.h. $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ ist Majorante und $\sum_{n=0}^{\infty} a_n b^{-n}$ konv. absolut.
(Satz 52). ~~✗~~

Bem Die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ entspricht der Zahl $(b-1), (b-1)(b-1), \dots$
d.h. für $b=10$ $9, 999 \dots = \underset{\sim}{9} \underset{\sim}{9} = 10$.

(93) Lemma 64 Sei $b \in \mathbb{N}$, $b \geq 2$. Dann lässt sich jede reelle Zahl $x \in \mathbb{R}$, $x \geq 0$ als b -adischer Bruch darstellen.

Beweis (Übung) Skizze: O.B.d.A. sei $x \in [0, 1)$

Setze: $a_0 = 0$ und

$$a_{n+1} = \left\lfloor \left(x - \sum_{k=0}^n a_k b^{-k} \right) \cdot b^{n+1} \right\rfloor$$

und beweise dann $a_n \in \{0, \dots, b-1\} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

$$\text{und} \quad x = \sum_{n=0}^{\infty} a_n b^{-n}$$

Satz 65 Für jedes $b \in \mathbb{N}$, $b \geq 2$ gilt

$\mathbb{R} = \{x \mid x \text{ oder } -x \text{ ist } b\text{-adischer Bruch}\}.$

Beweis „ $\supseteq$ “: Lemma 63, „ $\subseteq$ “: Lemma 64.

□

(94) Eigenschaften von Mengen (→ etwa Forster §9)

Erinnerung : • Intervalle $[a, b]$, (a, b) , $[a, b)$, $(a, b]$

(Forster: $(a, b) =]a, b[$, $[a, b) = [a, b[$, $(a, b] =]a, b]$)

Def 66 Eine nichtleere Menge A heißt abzählbar, wenn es eine surjektive Abbildung $\tau: \mathbb{N} \rightarrow A$ gibt, sonst heißt $A \neq \emptyset$ überabzählbar.

Anschaulich: $A = \{a_0, a_1, a_2, \dots\}$, $\tau(k) = a_k \quad \forall k \in \mathbb{N}$.

Bsp • $\mathbb{N}$ ist abzählbar

• endliche Mengen $A = \{a_0, a_1, \dots, a_n\}$, $\tau(k) = \begin{cases} a_k & k \leq n \\ a_n & k > n \end{cases}$

• $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ Folge $\Rightarrow \{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ abzählbar

(95) Satz 2.67 Die Vereinigung abzählbar vieler abzählbarer Mengen ist abzählbar, d.h. $(M_n \text{ abzählbar } \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow \bigcup_{n \in \mathbb{N}} M_n \text{ abzählbar})$.

Beweis: Sei $M_n = \{x_{n,k} \mid k \in \mathbb{N}\}$. Dann

$$\begin{aligned}
 M_0 &= \{x_{0,0}, x_{0,1}, x_{0,2}, x_{0,3}, \dots\} \\
 M_1 &= \{x_{1,0}, x_{1,1}, x_{1,2}, x_{1,3}, \dots\} \\
 M_2 &= \{x_{2,0}, x_{2,1}, x_{2,2}, \dots\} \\
 M_3 &= \{x_{3,0}, x_{3,1}, x_{3,2}, \dots\} \\
 &\vdots
 \end{aligned}$$

Diagram illustrating the enumeration of elements a_k from the sets M_n using a zigzag path:

- $a_0 \rightarrow x_{0,0}$
- $a_1 \rightarrow x_{0,1}$
- $a_2 \rightarrow x_{1,0}$
- $a_3 \rightarrow x_{2,0}$
- $a_4 \rightarrow x_{1,1}$
- $a_5 \rightarrow x_{0,2}$
- $a_6 \rightarrow x_{0,3}$
- $a_7 \rightarrow x_{1,2}$
- $a_8 \rightarrow x_{2,1}$
- $a_9 \rightarrow x_{3,0}$

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} M_n = \{x_{n,k} \mid n, k \in \mathbb{N}\} = \{a_k \mid k \in \mathbb{N}\}$$



(96) Korollar 6.8 Seien $M_1, \dots, M_n$ abzählbar, dann ist auch
 $M_1 \times \dots \times M_n = \{(x_1, \dots, x_n) \mid x_k \in M_k\}$
 abzählbar.

Beweis Wir zeigen $n=2$ (für $n > 2$ folgt induktiv).

Sei $M_1 = \{x_0, \dots\} = \{x_\alpha \mid \alpha \in \mathbb{N}\}$.

$$\begin{aligned} M_1 \times M_2 &= \{(x, y) \mid x \in M_1, y \in M_2\} \\ &= \bigcup_{x \in M_1} \{(x, y) \mid y \in M_2\} \\ &\stackrel{\text{da } M_1 \text{ abzählbar}}{=} \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \underbrace{\{(x_n, y) \mid y \in M_2\}}_{A_n} \end{aligned}$$

$$= \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \quad \text{mit } A_n \text{ abzählbar u.g.}$$

Satz 2.67 $\Rightarrow$ Das $\mathcal{P}$ ist abzählbar. □

M_2 abzählbar

$\Rightarrow \exists \tau: \mathbb{N} \rightarrow M_2$ surj.

Für $n \in \mathbb{N}$ fest ist

$\sigma: M_2 \rightarrow A_n, \sigma(y) = (x_n, y)$

bijektiv. Also ist

$$\sigma \circ \tau: \mathbb{N} \rightarrow A_n$$

$$\tau \searrow M_2 \nearrow \sigma$$

surjektiv. Als A_n abzählbar.