

§7 Lemma 69 a) A ist genau dann abzählbar, wenn es eine abzählbare Menge M und eine surjektive Abbildung $\sigma: M \rightarrow A$ gibt.

b) A abzählbar $M \subseteq A, M \neq \emptyset \Rightarrow M$ abzählbar

Beweis a) A abzählbar $\Rightarrow \tau: \mathbb{N} \rightarrow A$ surjektiv, wobei $M = \mathbb{N}, \sigma = \tau$.

Sei M abzählbar und $\sigma: M \rightarrow A$ surjektiv.

Dann ex. $\tau: \mathbb{N} \rightarrow M$ surjektiv. Also ist $\sigma \circ \tau: \mathbb{N} \rightarrow A$ surjektiv und A abzählbar.

b) Sei $x_0 \in M$ bel. aber fest. Setze $\sigma(x) = \begin{cases} x & \text{falls } x \in M \\ x_0 & \text{falls } x \notin M \end{cases}$.

Dann ist $\sigma: A \rightarrow M$ surjektiv und nach a) ist M abzählbar. ✎

Bsp: • $\mathbb{N}^2$ abzählbar

• $\mathbb{Z}$ abzählbar, da $\mathbb{N}^2 \ni (p, q) \mapsto 6-p \in \mathbb{Z}$ surjektiv.

• $\mathbb{Q}$ — " —, da $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \setminus \{0\} \ni (p, q) \mapsto \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ surjektiv.

(98) Satz 70 $\mathbb{R}$ ist überabzählbar.

Beweis Wir zeigen, dass $(0,1)$ überabzählbar ist. Ang. $(0,1)$ ist abzählbar.

dann ex. eine Folg x_n mit $(0,1) = \{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$. Für

jedes x_n ex. eine Dezimaldarstellung mit

$$x_n = 0, x_{n1} x_{n2} x_{n3} \dots \quad \text{mit } x_{nk} \in \{0, \dots, 9\}.$$

Def. nun $c = 0, c_0 c_1 c_2 \dots$ mit $c_n = \begin{cases} x_{nn} + 2 & \text{falls } x_{nn} < 5 \\ x_{nn} - 2 & \text{falls } x_{nn} \geq 5 \end{cases}$.

Dann gilt $c_n \in \{2, \dots, 7\}$ und $c \in (0,1) \setminus \mathbb{Q}$.

$$|c_n - x_{nn}| = 2 \quad \forall n \in \mathbb{N}. \quad |c - x_n| \geq 10^{-n} > 0.$$

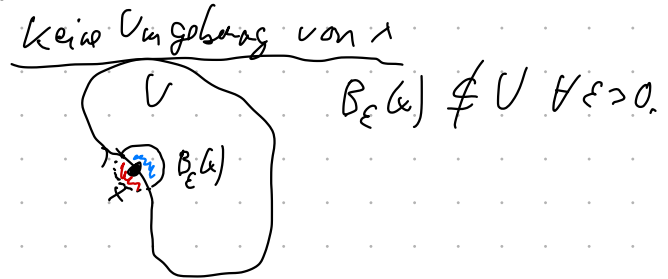
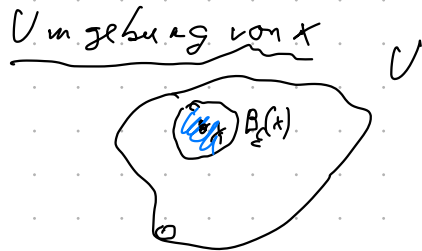
Also gilt $c \neq x_n \quad \forall n$, d.h. $c \notin \{x_n \mid n \in \mathbb{N}\} \not\subseteq (0,1)$.

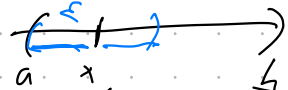
Korollar 71 Die Menge $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ der irrationalen Zahlen
ist überabzählbar.

(99) Erinnerung (offene) ε -Umgebung/ ε -Kugel/ ε -Ball von $x \in \mathbb{R}$: $\frac{\varepsilon}{\varepsilon} \frac{\varepsilon}{x}$

$$B_\varepsilon(x) = \{y \in \mathbb{R} \mid |y-x| < \varepsilon\} = (x-\varepsilon, x+\varepsilon)$$


Def 7.2 Eine Menge $U \subseteq \mathbb{R}$ heißt Umgebung von $x \in \mathbb{R}$, wenn es ein $\varepsilon > 0$ mit $B_\varepsilon(x) \subseteq U$ gibt.



- Bsp
- (a, b) ist Umgebung von allen $x \in (a, b)$
 - Sei $x \in (a, b)$, dann gilt $a < x < b$ und $\varepsilon = \min\{|a-x|, |b-x|\} > 0$
 - und $B_\varepsilon(x) \subseteq (a, b)$
 - $[a, b]$ ist Umgebung von allen $x \in (a, b)$ aber nicht von $x = a$ oder $x = b$
 - $B_\varepsilon(x)$ ist Umgebung von x
- 

(100)

- $B_\varepsilon(x)$ ist Umgebung von allen $y \in B_\varepsilon(x)$, denn $B_\varepsilon(x) = (x-\varepsilon, x+\varepsilon)$.

Def 7.3 Eine Menge $M \subseteq \mathbb{R}$ heißt offen, wenn es zu jedem $x \in M$ eine Umgebung U von x mit $U \subseteq M$ gibt.

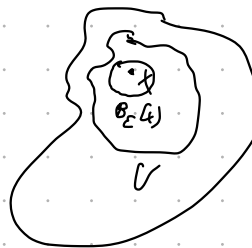
Eine Menge $A \subseteq \mathbb{R}$ heißt abgeschlossen, wenn $\mathbb{R} \setminus A$ offen ist.

- Beispiele
- offene Intervalle (a, b) sind offen, denn zu $x \in (a, b)$ ist $U = (a, b)$ eine Umgebung von x und $U \subseteq (a, b)$
 - $(-\infty, a)$, (b, ∞) ist offen
 - $(-\infty, a) \cup (b, \infty)$ ist offen
 - $[a, b] = \mathbb{R} \setminus ((-\infty, a) \cup (b, \infty))$ ist abgeschlossen
 - $[a, b)$ und $(a, b]$ sind weder offen, noch abgeschlossen
 - $\mathbb{R}$ und $\emptyset$ sind offen und abgeschlossen.
- Def. (a, S) = {x ∈ ℝ | a < x < b}
-

- (101) Satz 74 Für $M \subseteq \mathbb{R}^n$ äquivalent:
- a) M ist offen
 - b) $\forall x \in M \exists \varepsilon > 0$ mit $B_\varepsilon(x) \subseteq M$
 - c) M ist Umgebung von allen $x \in M$
 - d) $\forall x \in M \exists U$ offen mit $x \in U \subseteq M$

Beweis a) $\Rightarrow$ b) Sei $x \in M$. Dann ex. Umgebung U von x mit $U \subseteq M$.
Also ex. $\varepsilon > 0$ mit $B_\varepsilon(x) \subseteq U \subseteq M$

b) $\Rightarrow$ c) Sei $x \in M$, dann ex. $\varepsilon > 0$ mit $B_\varepsilon(x) \subseteq M$.
Also ist M Umgebung von x .



c) $\Rightarrow$ a) Sei $x \in M$. Dann ist $U := M$ eine Umgebung von x und es gilt $U \subseteq M$.

a) $\Rightarrow$ d) Sei $x \in M$. Dann ist $U := M$ offen und es gilt $x \in U \subseteq M$.

d) $\Rightarrow$ a) Sei $x \in M$. Dann ex. $U \subseteq M$ offen mit $x \in U \subseteq M$. Wegen a) $\Leftrightarrow$ c) ist U Umgebung von x .

(102) Achtung: Offene Mengen sind Umgebung aller ihrer Punkte,
aber Umgebungen sind i.A. nicht offen.

Bsp $[x-\varepsilon, x+\varepsilon]$ für $\varepsilon > 0$ ist Umgebung von x , aber nicht offen.

Satz 75 a) $\mathbb{R}$ und $\emptyset$ sind offen (und abgeschlossen).

b) Seien $M_1, \dots, M_n$ offen. Dann ist auch $\bigcap_{k=1}^n M_k$ offen.

c) Sei I eine ^{bel.} Indexmenge und M_i offen $\forall i \in I$, dann ist
auch $\bigcup_{i \in I} M_i = \{x \mid \exists i \in I \text{ mit } x \in M_i\}$ offen.

Beweis a) Sei $s \in \mathbb{R}$, dann ist $B_r(s) \subseteq \mathbb{R} \Rightarrow \mathbb{R}$ offen $\Rightarrow \emptyset$ abgeschlossen.
Sei $x \in \emptyset$, dann ist nichts zu zeigen $\Rightarrow \emptyset$ offen $\Rightarrow \mathbb{R}$ abgeschlossen.

b) Sei $x \in \bigcap_{k=1}^n M_k = \{y \mid y \in M_k \forall k\}$. Dann $x \in M_k \forall k$. Also exist.

$\varepsilon_k > 0$ mit $B_{\varepsilon_k}(x) \subseteq M_k$. Sei nun $\varepsilon = \min\{\varepsilon_k \mid k=1, \dots, n\} > 0$,
dann gilt $B_\varepsilon(x) \subseteq B_{\varepsilon_k}(x) \subseteq M_k$ und somit $B_\varepsilon(x) \subseteq \bigcap_{k=1}^n M_k$.

c) Sei $x \in \bigcup_{i \in I} M_i = \{y \mid \exists i \in I: y \in M_i\}$. Dann gilt $x \in M_i$ für ein i
und $x \in M_i \subseteq \bigcup_{i \in I} M_i$. □

(103) D.h. endliche Schnitte offener Mengen sind offen
und beliebige Vereinigungen ——— " ———

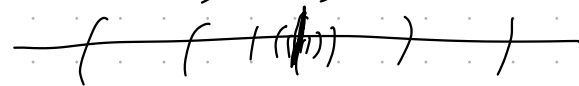
Aber: Unendliche Schnitte offener Mengen sind i.A. nicht offen!

Bsp: Für $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ sei $M_n = B_{\frac{1}{n}}(0) = (-\frac{1}{n}, \frac{1}{n})$.

Dann sind alle M_n offen aber

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} M_n = \{x \mid |x| < \frac{1}{n} \ \forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\} = \{0\}$$

ist nicht offen.



Für $x \in I = [0, 1]$ sei $M_x = (x-1, x+1) = B_1(x)$.

Dann ist M_x offen $\forall x \in I$ und

$$\bigcup_{x \in I} M_x = (-1, 2).$$