104 **Satz 76** a) $\mathbb{R}$ und $\emptyset$ sind abgeschlossen.

b) Seien $A_1 \dots A_n \subseteq \mathbb{R}$ abgeschlossen. Dann ist auch $\bigcup_{k=1}^{n} A_k$ abgeschlossen.

c) Sei I beliebige Indexmenge und $A_i \subseteq \mathbb{R}$ abgeschl. $\forall i \in I$, dann ist auch $\bigcap_{i \in I} A_i$ abgeschlossen.

Beweis a) (Satz 75 a)) ✓

b) Sei $M_k = \mathbb{R} \setminus A_k \ \forall k$. Dann ist M_k offen und

$$\mathbb{R} \setminus \left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k \right) = \{ x \in \mathbb{R} \mid \forall k : x \notin A_k \} = \{ x \in \mathbb{R} \mid \forall k : x \in M_k \}$$

$$= \bigcap_{k=1}^{n} M_k \text{ ist offen nach Satz 75 b)}$$

c) Sei $M_i = \mathbb{R} \setminus A_i \ \forall i$. Dann ist M_i offen $\forall i$ und

$$\mathbb{R} \setminus \left(\bigcap_{i \in I} A_i \right) = \{ x \in \mathbb{R} \mid \exists i \in I : x \notin A_i \} = \{ x \in \mathbb{R} \mid \exists i : x \in M_i \}$$

$$= \bigcup_{i \in I} M_i \text{ offen nach Satz 75 c)}$$

$\boxtimes$

105 **Satz 7.7** $A \subseteq \mathbb{R}$ ist genau dann abgeschlossen, wenn gilt:

$(*)$ Für jede konvergente Folge (a_n) in A (d.h. $a_n \in A$) gilt $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \in A$.

Beweis Sei $A \subseteq \mathbb{R}$ abgeschlossen und (a_n) eine konv. Folge in A.

Ang. $a = \lim\limits_{n\to\infty} a_n \notin A$. Dann gilt $a \in \mathbb{R} \setminus A =: O$.

Da O offen ex. $\varepsilon > 0$ mit $B_\varepsilon(a) \subseteq O \Rightarrow B_\varepsilon(a) \cap A = \emptyset$.

D.h. $\forall n$ gilt $a_n \in A \Rightarrow a_n \notin B_\varepsilon(a) \Rightarrow |a_n - a| \geq \varepsilon \ \forall n$. $\lightning$ zu $a_n \to a$.

Es gelte nun $(*)$: Ang. A nicht abgeschlossen.

Dann ist $O := \mathbb{R} \setminus A$ nicht offen. D.h. es ex. $a \in O$ mit $\forall \varepsilon > 0$ $B_\varepsilon(a) \not\subseteq O$. Insbesondere kann man für alle $n \in \mathbb{N}$ folg. ein $a_n \in B_{\frac{1}{n}}(a)$ mit $a_n \notin O$.

Dann gilt $a_n \in A$ und $|a_n - a| < \frac{1}{n}$. Also $\underset{\in A}{a_n} \longrightarrow a \notin A$ $\lightning$ zu $(*)$ $\boxed{}$

(106) Def 78 Sei $M \subseteq \mathbb{R}$, dann heißt

a) $\overline{M} := \bigcap\limits_{\substack{M \subseteq A \subseteq \mathbb{R} \\ A \text{ abgeschlossen}}} A$ der Abschluß von M,

b) $\operatorname{int} M := \bigcup\limits_{\substack{O \subseteq M \\ O \text{ offen}}} O$ das Innere von M,

c) $\partial M = \overline{M} \setminus \operatorname{int} M$ der Rand von M.

Bem Aus Satz 76 c) $\Rightarrow$ $\overline{M}$ abgeschlossen

Aus Satz 75 c) $\Rightarrow$ $\operatorname{int} M$ offen

$\operatorname{int} M \subseteq M \subseteq \overline{M}$

$\partial M = \overline{M} \setminus \operatorname{int} M = \overline{M} \cap (\mathbb{R} \setminus \operatorname{int} M)$ ist abgeschl.

(107) **Beispiel**

a) - - - ∘ nicht enthalten

—— • enthalten

b) $M=(a,b) \Rightarrow \overline{M}=[a,b]$, $\operatorname{int} M=(a,b)$, $\partial M=\{a,b\}$

$M=[a,b] \Rightarrow$ —— 〃 ——

$M=(a,b] \Rightarrow$ —— 〃 ——

$M=[a,b) \Rightarrow$ —— 〃 ——

c) $M=[-1,0)\cup(0,1)$

$$\left.\begin{array}{l} \overline{M}=[-1,1] \\ \operatorname{int} M=(-1,0)\cup(0,1) \end{array}\right\} \partial M=\{-1,0,1\}$$

108 **Bem** $a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} a \iff \forall \varepsilon>0\ \exists n_0\in\mathbb{N}$ mit $|a_n-a|<\varepsilon\ \forall n\geq n_0$

$\iff \forall \varepsilon>0\ \exists n_0\in\mathbb{N}$ mit $a_n\in B_\varepsilon(a)\ \forall n\geq n_0$

$\iff \forall U$ mit U ist Umgebung von a $\exists n_0\in\mathbb{N}$ mit $a_n\in U\ \forall n\geq n_0$

$\iff \forall O$ offen, $a\in O$ $\exists n_0\in\mathbb{N}$ mit $a_n\in O\ \forall n\geq n_0$

$\to$ Übung

Def 79 Sei $M\subseteq\mathbb{R}$.

a) $a\in\mathbb{R}$ heißt Berührpunkt von M, falls

$\forall \varepsilon>0$: mindestens ein Punkt von A ist in $B_\varepsilon(a)$

b) $a\in\mathbb{R}$ heißt Häufungspunkt von M, falls

$\forall \varepsilon>0$: Es liegen unendlich viele Punkte von A in $B_\varepsilon(a)$

Bsp a) $a\in A \Rightarrow$ Berührpunkt, b) $0,1$ sind Berührpunkte von $(0,1)$

b) $A=\{\frac{1}{n} \mid n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}\}$, 0 HP von $A \Rightarrow 0$ ist Berührpunkt von A

$\frac{1}{n}$ ist Berührpunkt, aber kein HP.

(109) Def 80 a) $M \subseteq \mathbb{R}$ heißt nach oben (bzw. unten) beschränkt, wenn es ein $K \in \mathbb{R}$ mit $x \leq K$ $(K \leq x)$ $\forall x \in M$.

K heißt obere (bzw. untere) Schranke von M.

b) M heißt beschränkt, wenn M nach oben und unten beschränkt ist.

c) $K \in \mathbb{R}$ heißt Supremum (Infimum) von $M \subseteq \mathbb{R}$, wenn K kleinste obere (größte untere) Schranke von M ist

Satz 81 (Supremumseigenschaft) Sei $M \subseteq \mathbb{R}$, $M \neq \emptyset$ nach oben (unten) beschränkt. Dann ex. ein eindeutiges Supremum (Infimum) von M in $\mathbb{R}$.

Beweis (Forster)

(110) Wir schreiben für $M \subseteq \mathbb{R}$, $M \neq \emptyset$.

$$\sup(M) := \begin{cases} \text{Supremum von } M \subseteq \mathbb{R}, \text{ falls } M \text{ nach oben beschr.} \\ +\infty & \text{sonst} \end{cases}$$

$$\inf(M) := \begin{cases} \text{Infimum von } M, \text{ falls } M \text{ nach unten beschr.} \\ -\infty & \text{sonst} \end{cases}$$

<u>Bsp</u> a) $\sup(\mathbb{R}) = \infty$, $\inf(\mathbb{R}) = -\infty$

b) $M = \left\{ \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \right\}$ $\sup(M) = 1$, $\inf(M) = 0$

<u>Def 82</u> Sei $M \subseteq \mathbb{R}$, $M \neq \emptyset$, abgeschlossen und beschränkt, dann heißt M <u>kompakt</u>.

<u>Bem</u> Sei M kompakt, dann $\sup(M) \in M$, $\inf(M) \in M$.

111 **Satz 83** Sei $K \subseteq \mathbb{R}$ kompakt und (a_n) eine Folge in K.

Dann besitzt $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine konvergente TF $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$

mit $\lim\limits_{k\to\infty} a_{n_k} \in K$.

Beweis a) K kompakt $\Rightarrow$ K beschränkt $\Rightarrow$ (a_n) beschränkt

$\xRightarrow[\text{Bolzano-Weierstrass}]{\text{Satz 43}}$ $\exists$ TF (a_{n_k}) mit $a_{n_k} \to a \in \mathbb{R}$

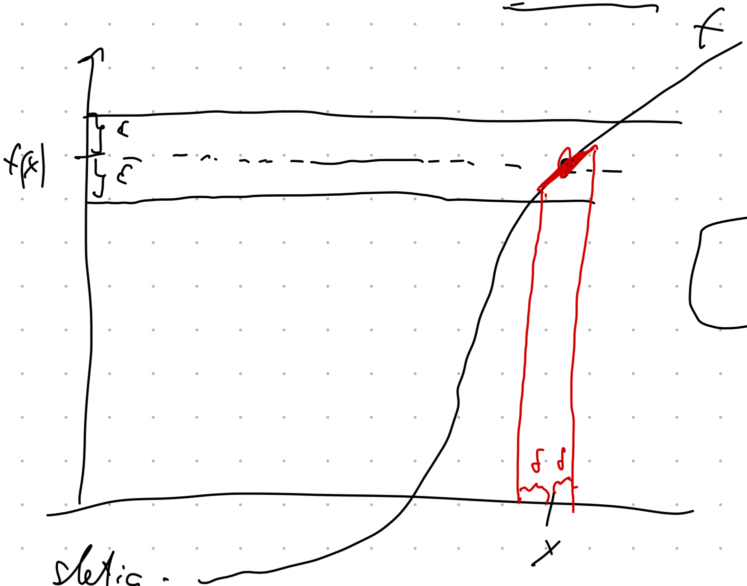
b) K kompakt $\Rightarrow$ K abgeschlossen $\xRightarrow{\text{Satz 77}}$ $a \in K$ $\square$

(112) **Def 84** Sei $D \subseteq \mathbb{R}$ nicht leer. Eine Funktion $f: D \to \mathbb{R}$ heißt **stetig im Punkt $x \in D$**, falls gilt:

(*) $\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0: \; |y - x| < \delta \Rightarrow |f(y) - f(x)| < \varepsilon \; \forall y \in D.$

f heißt **stetig**, wenn f in jedem $x \in D$ stetig ist.

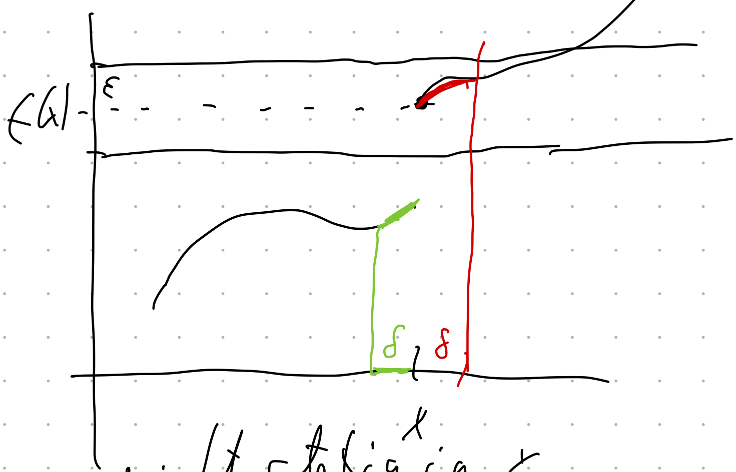
(*) $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0: y \in B_\delta(x) \Rightarrow f(y) \in B_\varepsilon(f(x)).$



stetig in x

$\boxed{\text{(*) } \varepsilon\text{-}\delta\text{-Kriterium}}$

113 Gegenbeispiel



nicht stetig in x

119 **Satz 85** $f: D \to \mathbb{R}$ ist genau dann stetig in $x \in D$, wenn:

(**) Für alle Folgen (x_n) in D mit $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x$ gilt

$$f(x_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} f(x)$$

(**) Folgen Kriterium (Folgenstetigkeit)