(115) **Satz 85** ⊛ $f: D \to \mathbb{R}$ ist genau dann stetig in $x \in D$, wenn gilt:

⊛⊛ Für alle Folgen (x_n) in D mit $x_n \to x$ gilt $f(x_n) \to f(x)$.

Beweis ⊛ ⇒ ⊛⊛: f stetig $x \in D$, (x_n) in D mit $x_n \to x$.

Sei $\varepsilon > 0$, dann ex. $\delta > 0$ mit $|x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$.

Da $x_n \to x$ ex. zu $\delta > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $|x_n - x| < \delta \ \forall n \geq n_0$

Für $n \geq n_0$: $|x_n - x| < \delta \Rightarrow |f(x_n) - f(x)| < \varepsilon$.

⊛⊛ ⇒ ⊛: Aus f ist nicht stetig in x. Dann gilt

$\exists \varepsilon > 0 \ \forall \delta > 0$: $\exists y \in D$ mit $|x - y| < \delta$ aber $|f(y) - f(x)| \geq \varepsilon$.

Zu $\delta = \frac{1}{n}$ sei nun $x_n \in D$ ein solcher Punkt mit

$|x - x_n| < \delta = \frac{1}{n}$ und $|f(x_n) - f(x)| \geq \varepsilon$.

Also gilt für die Folge (x_n) in D

$|x - x_n| < \frac{1}{n}$ d.h. $x_n \to x$, aber wegen $|f(x_n) \not\to f(x)$ ↯

(116) **Def 86** Sei $f: X \to Y$. Dann ist

- X der Definitionsbereich von f
- $f(M) := \{f(x) \mid x \in M\}$ das Bild von $M \subseteq X$ unter f
- $f^{-1}(M) := \{x \in X \mid f(x) \in M\}$ das Urbild von $M \subseteq Y$ unter f
- $\{(x, f(x)) \in X \times Y \mid x \in X\}$ der Graph von f

Satz 87 Sei D offen. $f: D \to \mathbb{R}$ ist genau dann stetig, wenn gilt:
Für alle $U \subseteq Y$ offen ist auch $f^{-1}(U) \subseteq X$ offen.

Beweis: (Übung)

(177) **Def 88** Seien $f: D \to \mathbb{R}$, $g: D \to \mathbb{R}$, $h: D \to \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

a) $f+g: D \to \mathbb{R}$, $(f+g)(x) := f(x) + g(x)$

b) $f-g: D \to \mathbb{R}$, $(f-g)(x) := f(x) - g(x)$

c) $f \cdot g: D \to \mathbb{R}$, $(f \cdot g)(x) := f(x) \cdot g(x)$

d) $\frac{f}{h}: D \to \mathbb{R}$ $\left(\frac{f}{h}\right)(x) := \frac{f(x)}{h(x)}$

e) $\lambda f: D \to \mathbb{R}$: $(\lambda f)(x) := \lambda f(x)$

Def 89 • Eine Fkt. $p: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ von der Form

$$p(x) = \sum_{k=0}^{m} a_k x^k \quad \text{mit } a_0, \dots, a_m \in \mathbb{R}$$ heißt Polynom.

• Falls $a_m \neq 0$, so heißt p vom Grad m "und wir setzen $\deg(p) = m$.

• Ferner def. $P_m = \{p: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid p \text{ ist Polynom}, \deg(p) \leq m\}$

• Eine Fkt. $f: D \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ für Polynome p, q mit $q(x) \neq 0 \ \forall x \in D$ heißt rationale Funktion.

(118) **Satz 90** a) Konstante Fkten sind stetig

b) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = x$ ist stetig

c) Seien $f, g, h: D \to \mathbb{R}$, $h(x) \neq 0 \ \forall x \in D$, $\lambda \in \mathbb{R}$, dann sind $f+g$, $f-g$, $f \cdot g$, $\frac{f}{h}$, λf stetig

d) Polynome sind stetig

e) Rationale Fkten sind stetig

Beweis: Sei $x \in D$ und (x_n) Folge in D mit $x_n \to x$

a) Sei $f(x) = c \ \forall x \in \mathbb{R}$. $f(x_n) = c \to c = f(x)$

b) Sei $f(x) = x$. $f(x_n) = x_n \to x = f(x)$

c) $\lim_{n\to\infty} \big((f+g)(x_n)\big) = \lim_{n\to\infty} \big(f(x_n) + g(x_n)\big) = \lim f(x_n) + \lim g(x_n) = f(x) + g(x)$ $\quad = (f+g)(x)$

d) $p(x) = \sum_{k=0}^{m} a_k x^k$ $\quad \lim p(x_n) = \sum_{k=0}^{m} a_k (\lim x_n)^k = \sum_{k=0}^{m} a_k x^k = p(x)$

e) p, q Polynome $\overset{d)}{\Longrightarrow} p, q$ stetig $\overset{c}{\Longrightarrow} f = \frac{p}{q}$ stetig. ∎

(179) **Satz 2.9.1** Die Exponentialfkt. $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist stetig

Beweis Wir stetig bei $x = 0$. Sei $x_n \in \mathbb{R}$ mit $x_n \to 0$

Restgliedabschätzung für $N = 0$:

$$\exp(x) = 1 + R_1(x) \text{ mit } |R_1(x)| \leq 2|x| \text{ für } |x| \leq 1.$$

Für n groß genug gilt $|x_n| < 1$ und somit

$$|\exp(x_n) - 1| = |\exp(x_n) - \exp(0)| = |R_1(x_n)| \leq 2|x_n|$$

$\longrightarrow 0$ für $n \to \infty$, also $\exp(x_n) \to \exp(0)$.

Sei nun $x \in \mathbb{R}$ bel. $x_n \to x$. Dann gilt

$$\lim \exp(x_n) = \lim \exp(x) \cdot \exp(x_n - x) = \exp(x) \cdot \lim \exp(\underbrace{x_n - x}_{\to 0})$$

$$= \exp(x) \exp(0) = \exp(x).$$

∎

(120) **Satz 92** Die Betragsfunktion $|\cdot| : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $x \mapsto |x|$ ist stetig.

Beweis Sei $x \in \mathbb{R}$ und $x_n \to x$.

1. Fall $x > 0$! Dann $x_n > 0$ für n groß genug, also

$$\lim_{n\to\infty} |x_n| = \lim_{n\to\infty} x_n = x = |x|$$

2. Fall $x < 0$: Dann $x_n < 0$ für n groß genug, also

$$\lim_{n\to\infty} |x_n| = \lim_{n\to\infty} -x_n = -x = |x|$$

3. Fall $x = 0$. Sei $\varepsilon > 0$. Dann ex. $n_0 \in \mathbb{N}$ mit

$$||x| - |0|| = |x_n| = |x_n - x| < \varepsilon \quad \forall n \geq n_0$$

also $|x_n| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 = |x|$. ∎

(121) **Satz 93** Seien $f: D \to \mathbb{R}$ und $g: E \to \mathbb{R}$ mit $f(D) \subseteq E$.
Sei f stetig in $x_0 \in D$ und g stetig in $f(x_0) \in E$,
dann ist $g \circ f: D \to \mathbb{R}$, $(g \circ f)(x) = g(f(x))$ stetig in x_0.

Beweis: Sei (x_n) Folge mit $x_n \to x$.

Dann gilt:

Da f stetig in x: $\underbrace{f(x_n)}_{y_n} \xrightarrow{n \to \infty} \underbrace{f(x)}_{y}$

Da g stetig in y:
$$(g \circ f)(x_n) = g(f(x_n)) = g(y_n) \xrightarrow{n \to \infty} g(y) = g(f(x)) = (g \circ f)(x). \quad \square$$

Bsp $$f(x) = \frac{42x^3 + \exp(|x-7|^{13})}{\exp(|x+1|^{-2}) \cdot ((x-7)^2 + 1)}$$

122 **Satz 2.44** (Zwischenwertsatz) Sei $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ stet. g und $f(a)<0<f(b)$. Dann ex. $x\in[a,b]$ mit $f(x)=0$.

Beweis Wir konstruieren Folgen $(a_n),(b_n)$ in $[a,b]$ mit

a) $f(a_n)\le 0\le f(b_n)$ $\forall n\in\mathbb{N}$

b) (a_n) monoton wachsend (b_n) monoton fallend

c) $b_n-a_n\to 0$

Dann gilt: $(a_n),(b_n)$ beschränkt und monoton.

(Satz 2.44) Also $\exists a',b'$ mit $a_n\to a'$, $b_n\to b'$

Wegen c) gilt $b_n-a_n\to b'-a'=0$, also $x:=b'=a'$

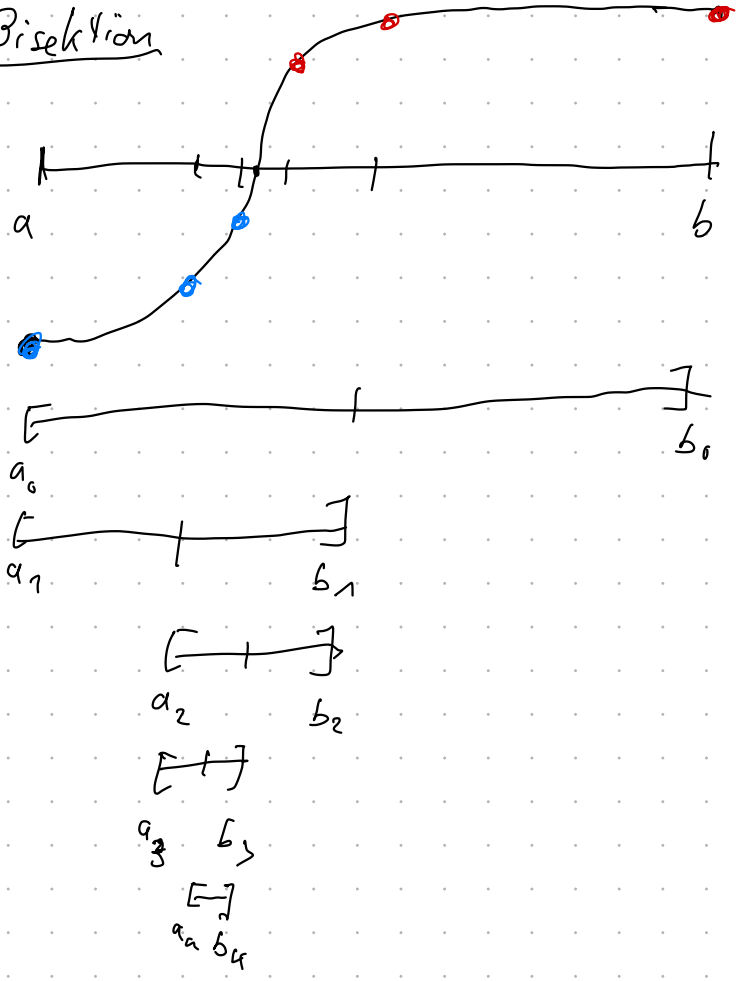
Wegen Stetigkeit und a) und Lemma 3.8 gilt

$$\lim_{n\to\infty} f(a_n)=f(x)\le 0$$
$$\lim_{n\to\infty} f(b_n)=f(x)\ge 0$$

$\Rightarrow f(x)=0$

Da $[a,b]$ abgeschl. gilt $x=\lim_{n\to\infty} a_n\in[a,b]$

123 Bisektion



(124) **Konstruktion von a_n b_n**

Sei $a_0 = a$, $b_0 = b$

Für n gelte $f(a_n) \leq 0 \leq f(b_n)$, $a_n, b_n \in [a,b]$, $a_n \leq b_n$

Setze $c_n = \frac{a_n + b_n}{2}$.

$$a_{n+1} = \begin{cases} c_n & \text{falls } f(c_n) \leq 0 \\ a_n & \text{falls } f(c_n) > 0 \end{cases} \geq a_n$$

$$b_{n+1} = \begin{cases} b_n & \text{falls } f(c_n) \leq 0 \\ c_n & \text{falls } f(c_n) > 0 \end{cases} \leq b_n$$

a) Dann gilt $f(a_{n+1}) \leq 0 \leq f(b_{n+1})$

Ferner $|b_{n+1} - a_{n+1}| = \begin{cases} |b_n - c_n| \\ |a_n - c_n| \end{cases} \overset{!}{=} \frac{1}{2} |b_n - a_n|$

c) Also $|b_n - a_n| = 2^{-n} |a_0 - b_0| \xrightarrow{n \to \infty} 0 \Longrightarrow b_n - a_n \to 0$ ∎