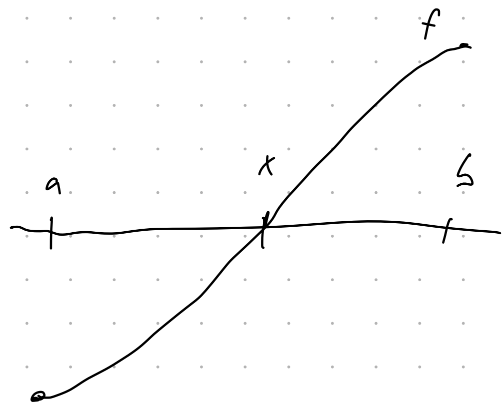
125 **Erinnerung** $f: D \to \mathbb{R}$ mit $D \subseteq \mathbb{R}$

f stetig in x $:\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 : \forall y \in D \quad |x-y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$

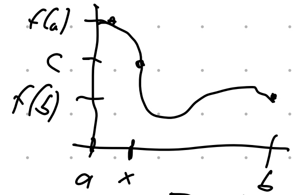
$\overset{\text{Satz 85}}{\Leftrightarrow}$ $\forall$ Folgen (x_n) in D mit $x_n \to x$ gilt $f(x_n) \to f(x)$

Bsp.:
- exp, rationale Fkten stetig
- f, g stetig $\Rightarrow f+g, f-g, f \cdot g, \frac{f}{g}, g \circ f$ stetig

Satz 99 (Zwischenwertsatz) Sei $f: [a,b] \to$ stetig mit $f(a) < 0 < f(b)$. Dann ex. $x \in [a,b]$ mit $f(x) = 0$



(126) **Korollar 95** Sei $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ stetig und $f(a)\le f(b)$ (bzw. $f(a)\ge f(b)$),



dann ex. für alle $c\in[f(a),f(b)]$ (bzw. $c\in[f(b),f(a)]$) ein $x_0\in[a,b]$ mit $f(x_0)=c$.

Beweis Sei oBdA $f(a)\le f(b)$ und $c\in[f(a),f(b)]$. Dann ist $g:[a,b]\to\mathbb{R}$ mit $g(x)=f(x)-c$ stetig und es gilt $g(a)=f(a)-c\le 0\le f(b)-c=g(b)$. Also ex. nach Satz 94 ein $x_0\in[a,b]$ mit $0=g(x_0)=f(x_0)-c$, d.h. $f(x_0)=c$. $\blacksquare$

Bsp Sei p ein Polynom von ungeradem Grad, d.h. $p(x)=a_0+a_1x+\dots+a_nx^n$ mit n ungerad, $a_n\neq 0$. Dann hat p mind. eine Nullstelle.

127

Def 96 $f : D \to \mathbb{R}$ heißt beschränkt, wenn ein $M \in \mathbb{R}$ existiert mit $|f(x)| \leq M \quad \forall x \in D$.

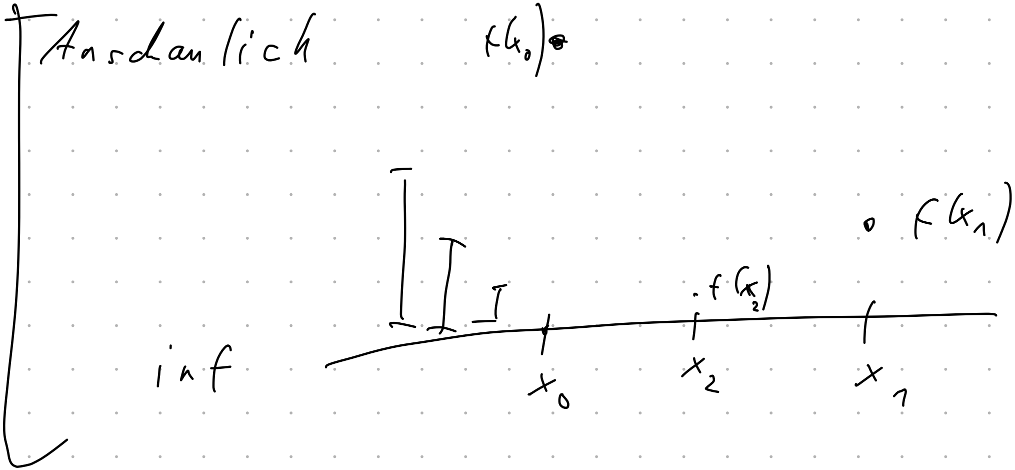
Satz 97 Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig auf dem kompakten Intervall $[a,b]$. Dann ist f beschränkt und nimmt Maximum und Minimum in $[a,b]$ an, d.h. es ex. $x_{min}, x_{max} \in [a,b]$ mit

$$f(x_{min}) = \inf \{ f(x) \mid x \in [a,b] \}$$
$$f(x_{max}) = \sup \{ f(x) \mid x \in [a,b] \}.$$

Beweis Zunächst nur x_{min}: Sei $A = \inf \{ f(x) \mid x \in [a,b] \} \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$.

Dann ex. eine Folge $x_n \in [a,b]$ mit $f(x_n) \to A$.

(128) Anschaulich



Da $x_n \in [a,b]$ ist (x_n) beschränkt, also ex. nach Bolzano-Weierstraß eine konv. TF (x_{n_k}) mit $x_{n_k} \xrightarrow[k\to\infty]{} x_0$. Da $[a,b]$ abgeschl. gilt $x_0 \in [a,b]$.

Da f stetig ist gilt $f(x_{n_k}) \xrightarrow[k\to\infty]{} f(x_0) \in \mathbb{R}$.

Da $f(x_{n_k})$ eine TF von $f(x_n)$ gilt auch $f(x_{n_k}) \xrightarrow[k\to\infty]{} A$.

D.h. $A = \inf\{f(x) / x \in [a,b]\} = f(x_0)$. Setze $x_{min} = x_0$.

Da $f(x_{min}) \in \mathbb{R}$, ist $f([a,b])$ durch $f(x_0)$ nach unten besch.

(129) Anwendung auf $g(x) = -f(x)$ liefert x_{max} mit

$$f(x_{max}) = B = \sup\{f(x) \mid x \in [a,b]\}$$

und somit ist $f([a,b])$ durch B nach oben beschränkt.

Also gilt

$$|f(x)| \leq M = \max\{|B|, |A|\} \in \mathbb{R}. \qquad \boxtimes$$

<u>Bemerkung</u> Die Aussage <u>gilt nicht</u> für $f: I \to \mathbb{R}$, wenn

- <u>I unbeschränkt</u> (Bsp. $f: I \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = x$ auf $I = [0,\infty)$)
- <u>I nicht abgeschlossen</u> (Bsp $f: I \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = \frac{1}{x}$ auf $I = (0,1]$)
- <u>f nicht stetig</u> (Bsp: $f: [-1,1] \to \mathbb{R}$ mit
$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{für } x \neq 0 \\ 0 & \text{für } x = 0 \end{cases}$$
)

(13d) Mit dem gleichen Beweis gilt die Aussage für stetige $f: D \to \mathbb{R}$ auf kompakten Mengen D (d.h. abgeschl. und beschränkt)

<u>Lemma 98</u> Sei $f: D \to \mathbb{R}$ stetig in $x_0 \in D$ und $f(x_0) > 0$ (bzw. < 0). Dann ex. ein $\delta > 0$ mit $f(x) > 0$ (bzw. < 0) $\forall x \in D$ mit $|x - x_0| < \delta$.

<u>Beweis</u> Sei $\varepsilon = f(x_0) > 0$. Dann ex. $\delta > 0$ mit

$$x \in D \quad |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

$$\Rightarrow \quad -f(x_0) = -\varepsilon < f(x) - f(x_0)$$

$$\Rightarrow \quad 0 < f(x)$$

(Für $f(x_0) < 0$ betrachte $-f$.) $\boxtimes$

131

Def 99 Eine Fkt. $f: D \to \mathbb{R}$ heißt

a) monoton wachsend, falls $x < y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$

b) streng — " —, falls $x < y \Rightarrow f(x) < f(y)$

c) monoton fallend, falls $x < y \Rightarrow f(x) \geq f(y)$

d) streng — " —, falls $x < y \Rightarrow f(x) > f(y)$.

Bspe
- $f(x) = x^3$ ist streng monoton wachsend
- exp ist streng monoton wachsend (Kor. 60)

Lemma 100 Sei $f: D \to \mathbb{R}$ streng monoton wachsend (bzw. fallend), dann ist $f: D \to D' := f(D)$ bijektiv und $f^{-1}: D' \to D$ ist ebenfalls streng monoton wachsend (bzw. fallend).

Beweis (Übung)

Satz 101 Sei $f : D \to \mathbb{R}$ streng monoton wachsend oder fallend, $D' = f(D)$ und f stetig. Dann ist $f^{-1} : D' \to D \subseteq \mathbb{R}$ stetig.

Beweis (siehe Forster 1, §12, Satz 1)

Erinnerung

- $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ streng monoton wachsend
- $\exp(x) > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$
- $\exp(x) \geq 1 + x \quad \forall x \geq 0$
- $0 < \exp(-x) = \dfrac{1}{\exp(x)} \leq \dfrac{1}{1+x} \quad \forall x \geq 0$
- $\exp$ stetig

$\exp(\mathbb{R}) = (0, \infty) =: \mathbb{R}^+$

Korollar 102 $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+ = (0, \infty)$ ist invertierbar

$\exp^{-1} : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ ist stetig

133 **Def 103** Die Abb. $\log = \ln := \exp^{-1} : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ heißt

natürlicher Logarithmus.

Achtung $\log = \exp^{-1}$ ist die inverse Fkt und nicht $\frac{1}{\exp(x)}$.

$$\log(x) = \exp^{-1}(x) \neq \exp(x)^{-1} = \frac{1}{\exp(x)}$$

Lemma 104 Es gilt $\forall x, x' \in \mathbb{R}^+$, $n \in \mathbb{N}$

a) $\log(x \cdot x') = \log(x) + \log(x')$

b) $\log\left(\frac{x}{x'}\right) = \log(x) - \log(x')$

c) $\log(x^n) = n \log(x)$

Beweis Sei $y = \log(x)$ und $y' = \log(x')$, d.h. $x = \exp(y)$, $x' = \exp(y')$

a) $\log(x \cdot x') = \log(\exp(y) \cdot \exp(y')) = \log(\exp(y + y')) = y + y' = \log(x) + \log(x')$

b) $\log\left(\frac{x}{x'}\right) = \log\left(\frac{\exp(y)}{\exp(y')}\right) = \log(\exp(y - y')) = y - y' = \log(x) - \log(x')$

c) $\log(x^n) = \log(\underbrace{x \cdot \ldots \cdot x}_{n\text{-mal}}) = \underbrace{\log(x) + \ldots + \log(x)}_{n\text{-mal}} = n \cdot \log(x)$. $\square$