

139 Erinnerung: $a \in \mathbb{R}$ Berührungspunkt von D

$$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \quad B_\varepsilon(a) \cap D \neq \emptyset$$

$$\Leftrightarrow \exists (a_n) \text{ mit } a_n \in D \quad a_n \rightarrow a$$

Def 105 Sei $f: D \rightarrow \mathbb{R}, D \subseteq \mathbb{R}$ und $c \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$.

a) Sei $a \in \mathbb{R}$ Berührungspunkt von D , dann

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = c, \text{ falls gilt } f(x_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} c$$

für alle Folgen (x_n) in D mit $x_n \rightarrow a$

b) Sei D nach oben unbeschränkt, dann

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = c, \text{ falls gilt } f(x_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} c$$

für alle Folgen (x_n) in D mit $x_n \rightarrow \infty$

c) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = c$ analog.

Satz 106 Sei $f: D \rightarrow \mathbb{R}, D \subseteq \mathbb{R}$. Dann ist

f genau dann stetig in $x_0 \in D$, wenn gilt

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0).$$

Beweis Wende Satz 85 an.

Bsp Sei $\text{sgn}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$\text{sgn}(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ -1 & x < 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

Dann gilt $a > 0$ (in $f(x) = 1 = f(a)$)
 $x \rightarrow a$

$a < 0$ (in $f(x) = -1 = f(a)$)
 $x \rightarrow a$

Für $a = 0$, $x_n \rightarrow a = 0$ gilt

$$f(x_n) \rightarrow 1 \quad \text{falls } x_n > 0 \quad \forall n$$

$$f(x_n) \rightarrow -1 \quad \text{falls } x_n < 0 \quad \forall n$$

d.h. $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ ex. nicht.

135 Lemma 107 Sei p ein Polynom vom Grad $n > 0$ mit $p(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k$ mit $a_n > 0$.

Dann gilt

$$\lim_{x \rightarrow \infty} p(x) = \infty, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} p(x) = \begin{cases} +\infty & n \text{ gerade} \\ -\infty & n \text{ ungerade} \end{cases}$$

Beweis Sei $c = \frac{1}{a_n} \max \{1, 2n|a_0|, \dots, 2n|a_{n-1}|\}$

Dann gilt für $x \geq c$ insbes. $x \geq 1$ und

$$\underline{k < n}: a_n x^n \geq a_n c x^k \geq 2n |a_k| x^k = 2n |a_k| x^k$$

$$\Rightarrow \frac{1}{n} a_n x^n + a_k x^k \geq 2 |a_k| x^k - |a_k| x^k = |a_k| x^k$$

$$\Rightarrow p(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \left(a_k x^k + \frac{1}{n} a_n x^n \right) \geq \sum_{k=0}^{n-1} |a_k| x^k \xrightarrow{x \rightarrow \infty} \infty$$

$$\left[\begin{array}{l} x \rightarrow -\infty \quad a_n a(\log) \end{array} \right]$$

Lemma 108 Sei $f: [a, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ stetig und $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$. Dann gilt

$$[f(a), \infty) \subseteq f(D)$$

Beweis Wegen $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$ ex. für jedes $n \in \mathbb{N}$ ein $x \geq a$ mit $f(x) \geq n$.

Nach Zwischenwertsatz gilt

$$[f(a), n] \subseteq [f(a), f(x)] \subseteq f(D)$$

und somit $[f(a), \infty) \subseteq f(D)$. $\square$

(136) Satz 109 Sei $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$.

Dann ist $f: \mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^n$
streng monoton wachsend,
bildet $\mathbb{R}_0^+$ auf $\mathbb{R}_0^+$ ab
und hat eine stetige Inverse
 $f^{-1}: \mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R}_0^+$.

Beweis: • Streng Monotonie ✓

• Wegen $x^n \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}_0^+$ gilt
 $f(\mathbb{R}_0^+) \subseteq \mathbb{R}_0^+$.

Nach Lemma 108 gilt

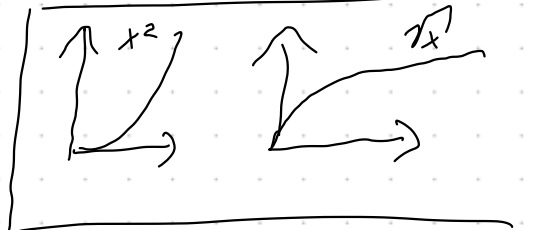
$\mathbb{R}_0^+ = [0, \infty) = [f(0), \infty) \subseteq f(\mathbb{R}_0^+)$
wegen $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$. Also $f(\mathbb{R}_0^+) = \mathbb{R}_0^+$.

• Nach Satz 101 ist f^{-1} stetig. $\square$

Bemerkung für n ungerade ist

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^n$ streng monoton
wachsend mit $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$

Def 110 Die Inverse der Fkt. f von oben
heißt n -te Wurzelfunktion und

wir schreiben $\sqrt[n]{x} = f^{-1}(x)$ 

mit $\sqrt[n]{\cdot}: \mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ für n gerade

$\sqrt[n]{\cdot}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ für n ungerade.

Bem Insbesondere $\exists x. \sqrt[n]{x} \in \mathbb{R}$
für alle $n \geq 2$ und $x \geq 0$.

137 Satz 111 Für $a > 0$ sei

$\exp_a: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ def. durch $\exp_a(x) = \exp(x \log(a))$.

Dann gilt:

a) $\exp_a(x+y) = \exp_a(x) \cdot \exp_a(y) \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$

b) $\exp_a(k) = a^k \quad \forall k \in \mathbb{Z}$

c) $\exp_a\left(\frac{p}{q}\right) = \sqrt[q]{a^p} \quad \forall p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}, q \geq 2$

d) $\exp_a$ ist stetig.

Beweis a) $\exp_a(x+y) = \exp((x+y) \log(a))$

$$= \exp(x \log a + y \log a) = \exp(x \log a) \cdot \exp(y \log a)$$

$$= \exp_a(x) \cdot \exp_a(y).$$

b) $k \in \mathbb{N}$: $\exp_a(k) = \exp_a(\underbrace{1 + \dots + 1}_{k\text{-mal}})$

$$\stackrel{a)}{=} \underbrace{\exp_a(1) \cdot \dots \cdot \exp_a(1)}_{k\text{-mal}} = \underbrace{\exp(\log a)}_a$$

$$= a^k$$

$$\exp_a(-k) = \exp(-k \log a) = \frac{1}{\exp(k \log a)} = \frac{1}{\exp_a(k)}$$

$$= \frac{1}{a^k} = a^{-k}$$

c) $a^{\frac{p}{q}} = \exp_a\left(\frac{p}{q}\right) = \exp\left(q \cdot \frac{p}{q} \log(a)\right)$

$$= \exp\left(\frac{p}{q} \log a\right)^q = \left(\exp_a\left(\frac{p}{q}\right)\right)^q \quad || \sqrt[q]{}$$

$$\sqrt[q]{a^p} = \exp_a\left(\frac{p}{q}\right).$$

d) $\left. \begin{array}{l} g: x \mapsto x \log(a) \text{ stetig} \\ f: y \mapsto \exp(y) \text{ stetig} \end{array} \right\} f \circ g = \exp_a \text{ stetig.}$ □

Def 112 Für $a > 0$ und $x \in \mathbb{R}$

def $a^x = \exp_a(x) = \exp(x \log(a)).$

Wegen $\exp_a(k) = a^k \quad k \in \mathbb{Z}$ ist das konsistent.

(13P) Satz 773 Seien $a, b > 0$ und $x, y \in \mathbb{R}$.
Dann gilt

$$a) a^x a^y = a^{x+y}$$

$$b) (a^x)^y = a^{x \cdot y}$$

$$c) a^x b^x = (ab)^x$$

$$d) \left(\frac{1}{a}\right)^x = a^{-x}$$

Beweis:

$$a) a^x a^y = \exp_a(x) \cdot \exp_a(y) = \exp_a(x+y) = a^{x+y}$$

$$b) (a^x)^y = \exp_{\exp_a(x)}(y)$$

$$= \exp(y \log(\exp_a(x)))$$

$$= \exp(y \underbrace{\log(\exp(x \cdot \log(a)))}_{= x \cdot \log(a)})$$

$$= \exp(y \cdot x \cdot \log(a)) = a^{x \cdot y}$$

$$\begin{aligned} c) a^x b^x &= \exp(x \log a) \cdot \exp(x \log b) \\ &= \exp(x(\log a + \log b)) \\ &= \exp(x \log(ab)) = (ab)^x. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d) \left(\frac{1}{a}\right)^x &= \exp\left(x \log\left(\frac{1}{a}\right)\right) \\ &= \exp(-x \log a) = a^{-x}. \quad \square \end{aligned}$$

(139) Gleichmäßige Stetigkeit

Def 114 Eine Fkt. $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ heißt gleichmäßig stetig, wenn gilt

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x, y \in D \underbrace{|x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon}_{(*)}$$

Unterschied zu Stetigkeit:

$$\text{stetig } \forall x \in D \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall y \in D \quad (*)$$

d.h. δ hängt i.A. von x ab

$$\text{glm. stetig } \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall x, y \in D \quad (*)$$

d.h. δ hängt nicht von x ab

Bemerkung $f \text{ glm. stetig} \Rightarrow f \text{ stetig}$

Frage: Gilt f auch die Umkehrung?

Bsp $f: (0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x}$ ist stetig
auf $f D = (0, 1]$.

Ang f glm. stetig.

Sei $\varepsilon = 1$. Ang $\exists \delta > 0$ mit

$$(*) \quad |x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon \quad \forall x, y$$

Sei $x = \frac{1}{n}$, $y = \frac{1}{2n}$. Dann gilt
für n groß genug

$$|x - y| = \left| \frac{1}{n} - \frac{1}{2n} \right| < \delta$$

und

$$|f(x) - f(y)| = \left| n - 2n \right| = |n| = n > \varepsilon.$$

$\nRightarrow$ zu $(*)$

D.h. f nicht glm. stetig
sondern nur stetig!

Andere Bsp: $f(x) = x^2$, $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$