

140 Erinnerung $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ glm.-stetig

$$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x, y \in D: |x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$$

Satz 175 Eine stetige Fkt. $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ auf einer kompakten Menge $D \subseteq \mathbb{R}$ ist glm.-stetig.

Erinnerung: D kompakt $\Leftrightarrow$ abgeschl. und beschränkt.

Beweis Sei $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ stetig und D kompakt.

Ang.: f nicht glm.-stetig, dann $\exists \varepsilon > 0$,

so dass $\forall \delta = \frac{1}{n} > 0$ gilt:

$\exists x_n, y_n \in D$ mit $|x_n - y_n| < \delta = \frac{1}{n}$

aber $|f(x_n) - f(y_n)| \geq \varepsilon$. (*)

Da $x_n, y_n \in D$ und D beschränkt, ex. nach Bolzano-Weierstraß konvergente TFen $(x_{n_k}), (y_{n_k})$ mit $x_{n_k} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} x, y_{n_k} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} y$.

Da D abgeschlossen ist gilt $x, y \in D$. Wegen $|x_{n_k} - y_{n_k}| < \frac{1}{n_k}$ gilt

$$x_{n_k} - y_{n_k} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} x - y = 0, \text{ d.h. } x = y.$$

Da f stetig und $x \in D$ und $x_{n_k} \rightarrow x$ und $y_{n_k} \rightarrow y = x$ gilt nun

$$|f(x_{n_k}) - f(y_{n_k})| \xrightarrow{k \rightarrow \infty} |f(x) - f(x)| = 0.$$

$\nRightarrow$ zu (*).

□

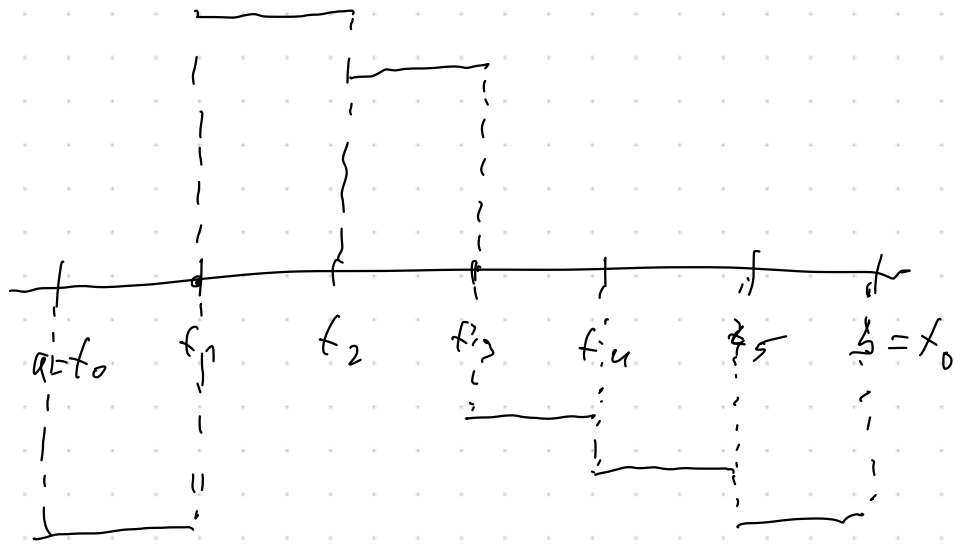
Spezialfall: $D = [a, b]$

(141) Def 116 Eine Fkt $p: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$

heißt Treppenfunktion, wenn es eine
Unterteilung $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$
von $[a, b]$ und Konstanten

$c_k \in \mathbb{R} \quad k = 1, \dots, n$ mit

$p|_{(t_{k-1}, t_k)} = c_k$, d.h. $p(x) = c_k \quad \forall x \in (t_{k-1}, t_k)$
gibt. (Die Werte $p(t_k)$ sind egal.)



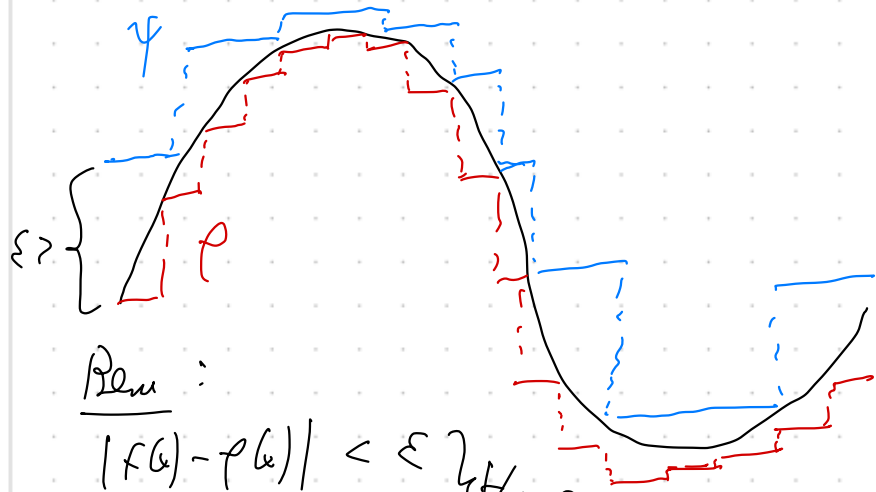
Konsequenz aus glw. Stetigkeit:

Satz 117 Sei $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig.

Dann ex. zu jedem $\varepsilon > 0$ Treppenfkt.en
 $p, \psi: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ mit

a) $p(x) \leq f(x) \leq \psi(x) \quad \forall x \in [a, b]$

b) $|p(x) - \psi(x)| \leq \varepsilon \quad \forall x \in [a, b]$



Bem:

$$\begin{cases} |f(x) - p(x)| < \varepsilon \\ |f(x) - \psi(x)| < \varepsilon \end{cases} \quad \forall x \in [a, b]$$

(192) Beweis: Nach Satz 115 ist f glm. stetig. Sei $\varepsilon > 0$.

Don a $\mathcal{I} \geq 0$ mit

(*) $|x-y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon \quad \forall x, y \in [a, b]$.

Wähle $p_n \in W$ mit $k := \frac{b-a}{n} < \delta$ und

set 20 $t_k = a + kh$ for $k=0, \dots, n$.

Donn n $g_i(t)$ $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$

mit $|t_k - t_{k-1}| = h < \delta$.

f stetig auf $I_k = [t_{k-1}, t_k]$

ex. $x_k^{\min}, x_k^{\max} \in \mathbb{I}_k$ minif

$$f(x_a^{\min}) = \min \{ f(k) \mid x \in I_k \} \text{ und}$$
$$f(x_k^{\max}) = \max \{ f(x) \mid x \in I_k \}.$$

Setze nun

$$\varphi(x) = \begin{cases} f(x_k^{min}) & , \text{ falls } x \in (x_{k-1}, x_k) \\ f(x_k) & , \text{ falls } x = x_k \end{cases}$$
$$\psi(x) = \begin{cases} f(x_{k+1}^{\max}) & , \text{ falls } x \in (t_k, t_{k+1}) \\ f(t_k) & , \text{ falls } x = t_k \end{cases}$$

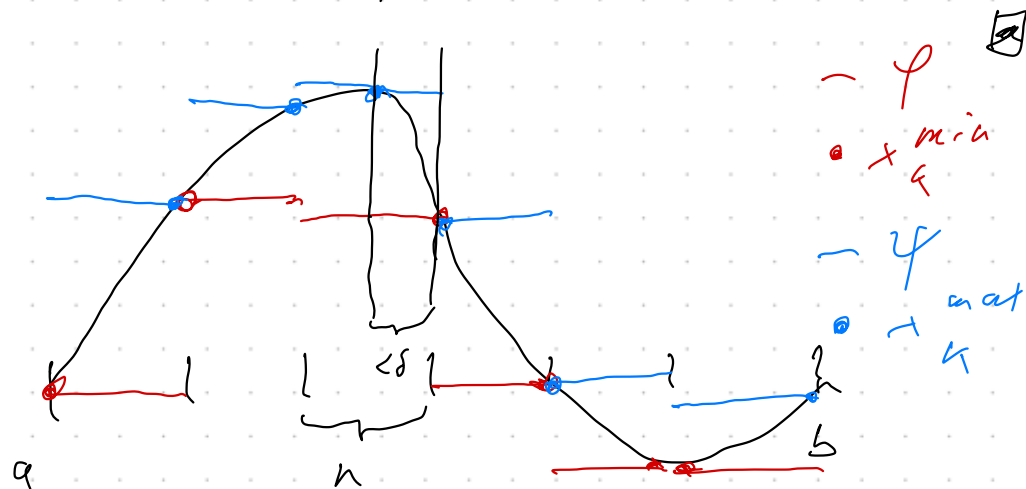
Dann gilt $p(k) \leq f(k) \leq 4 \cdot k \quad \forall k \in [9, 5]$

$$1. \text{ Fall } x = t_4 \Rightarrow |p(x) - \psi(x)| = 0 < \epsilon$$

2. Fall $x \in (t_{k-1}, t_k)$, dann gilt wegen (*)

$$|x_k^{\min} - x_k^{\max}| \leq h \leq \delta$$

$$\stackrel{(*)}{\implies} |f(x_k^{min}) - f(x_k^{max})| = |\varphi(x_k) - \psi(x_k)| < \varepsilon.$$



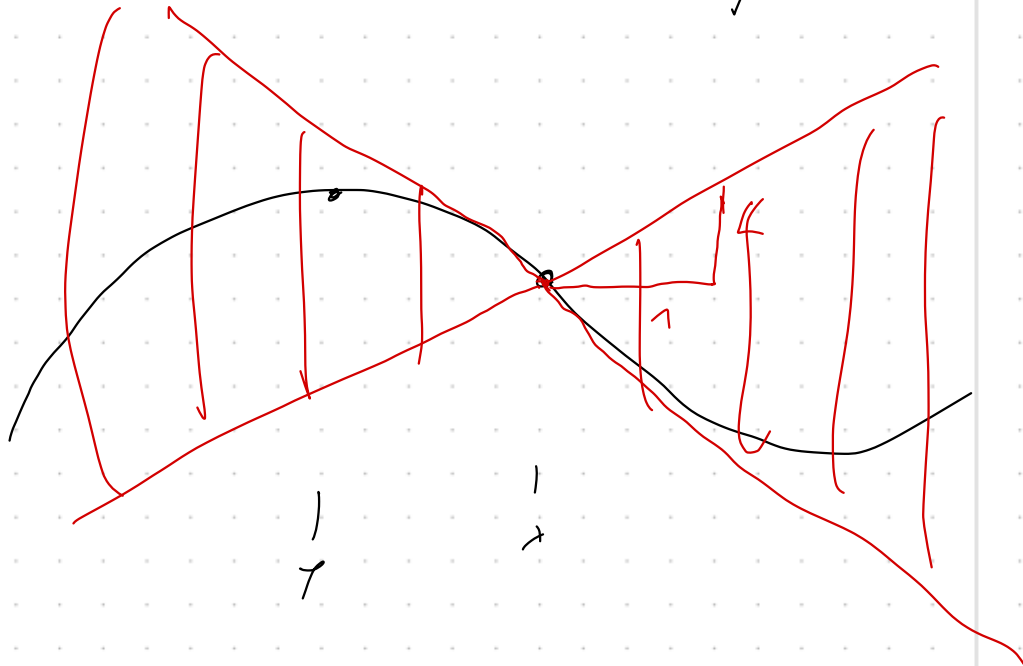
143 Def 118 Eine Fkt. $f: D \rightarrow \mathbb{R}$

heißt Lipschitz-stetig, wenn ein $L \geq 0$ mit

$$|f(x) - f(y)| \leq L |x - y| \quad \forall x, y \in D$$

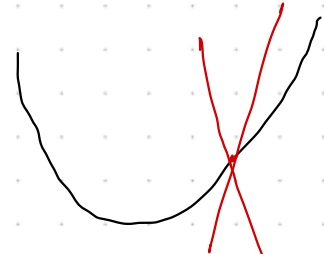
ex. L heißt dann Lipschitz-Konstante von f .

(Notation: Manchmal kurz
"f ist Lipschitz")



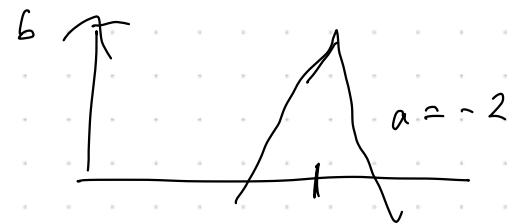
Bsp a) Sei p ein Polynom, dann ist
 $p: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ Lipschitz (später)

b) $p: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, p(x) = x^2$ ist nicht
Lipschitz-stetig.



c) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x) = mx + b$
Lipschitz-stetig $L = |m|$
 $|f(x) - f(y)| = |mx - my| = |m| |x - y|$

d) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x) = a|x - x_0| + b$
Lipschitz mit $L = |a|$



Satz 119 Sei $f: D \xrightarrow{x_0} \mathbb{R}$ Lipschitz-stetig,
dann ist f glb.-stetig. (Übung)

149 Bsp Sei $f(x) = \sqrt{x}$.

a) $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$

$$|f(0) - f(x)| = \sqrt{x} \quad \forall x \in [0, 1].$$

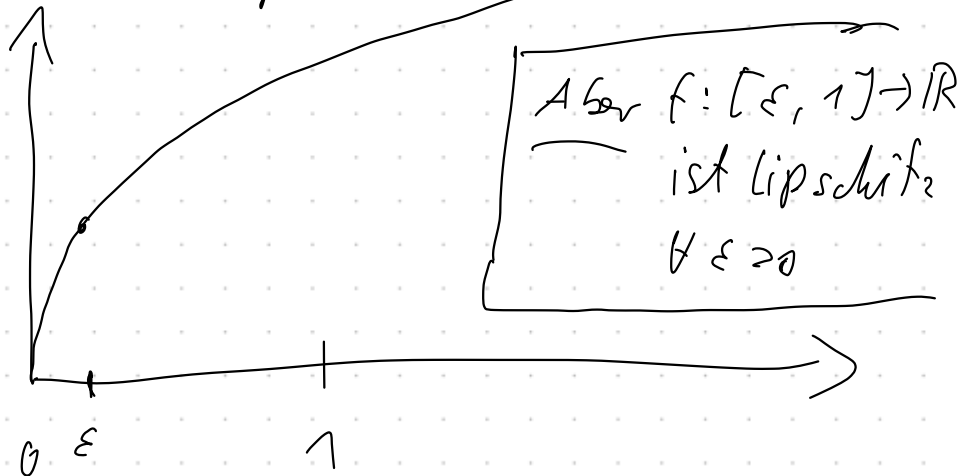
Ang $\exists L \geq 0$ mit

$$\sqrt{x} = |f(0) - f(x)| \leq L|0 - x| = Lx$$

(folgt durch $x > 0$)

$$L \geq \frac{1}{\sqrt{x}} \xrightarrow{x \rightarrow 0} \infty$$

D.h. $f: [0, 1]$ nicht Lipschitz,
aber glm. stetig



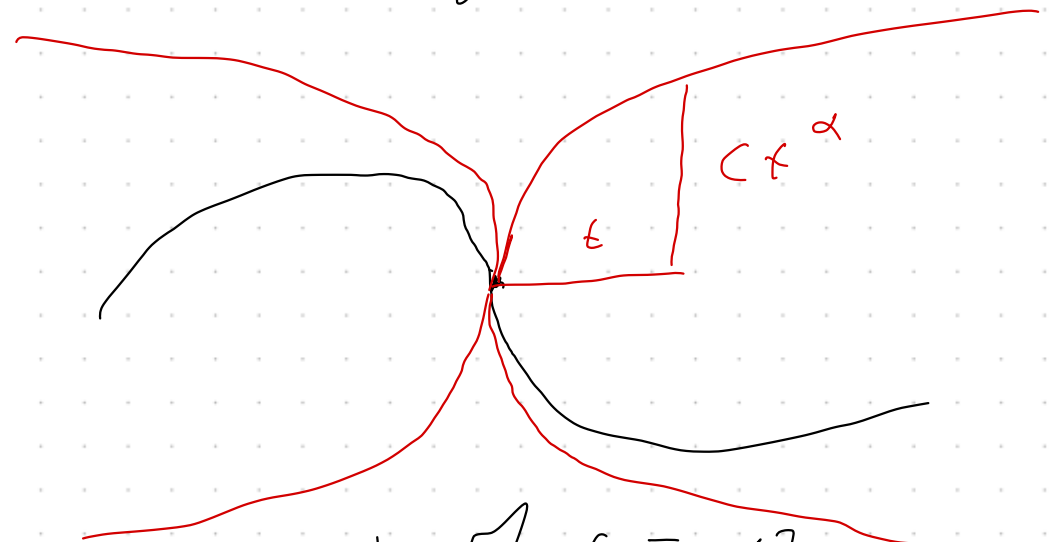
Lipschitz $\Rightarrow$ glm. stetig $\Rightarrow$ stetig
 $\Leftarrow$ $\Leftarrow$

Def 120 Eine Fkt. $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ heißt
Hölder-stetig zum Exponenten $\alpha \in (0, 1)$
(bzw. α -Hölder-stetig), wenn ein $C > 0$
ex. mit

$$|f(x) - f(y)| \leq C|x - y|^\alpha \quad \forall x, y \in D.$$

Satz 121 $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ α -Hölder stetig
 $\Rightarrow$ f glm. stetig.

Beweis: Übung



Bsp $f(x) = \sqrt{x}$, $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$
ist α -Hölder mit $\alpha = \frac{1}{2}$.

7.95) Differenziation

Def 1.22 Sei $D \subseteq \mathbb{R}$ und $f: D \rightarrow \mathbb{R}$

und $x \in D$ ein HP von D . Dann

heißt f differenzierbar (diff. bar)

in x , wenn der Grenzwert

$$f'(x) := \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h \neq 0}} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \in \mathbb{R} \quad (*)$$

ex.: Der Grenzwert $f'(x)$ heißt

Ableitung (oder Differentialquotient)

von f in x .

f heißt diff. bar in D , wenn

f diff. bar in allen $x \in D$.

Bem: Man kann $(*)$ auch als

$$f'(x) = \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h \neq 0}} \frac{f(x) - f(x-h)}{h}$$

$$= \lim_{\substack{\xi \rightarrow x \\ \xi \neq x}} \frac{f(\xi) - f(x)}{\xi - x}$$

schreiben.

Man verwendet auch die Notation

$$f'(x) = \frac{df(x)}{dx}$$

