146 **Satz 123** Sei $f: D \to \mathbb{R}$ und x ein HP von D. Dann f ist diff.bar in x mit $f'(x)$ genau dann, wenn

$$f(x+h) = f(x) + f'(x)h + r(h)$$

für alle $h \in \mathbb{R}$ mit $x+h \in D$ und

$$\lim_{\substack{h \to 0 \\ h \neq 0}} \frac{r(h)}{h} = 0 \text{ gilt.}$$

Bew!

$$f(\xi) = f(x) + f'(x)(\xi - x) + r(\xi - x)$$

mit

$$\lim_{\substack{h \to 0 \\ h \neq 0}} \frac{r(h)}{h} = 0 = \lim_{\substack{\xi \to x \\ \xi \neq x}} \frac{r(\xi - x)}{\xi - x}$$

Beweis: Sei $M \in \mathbb{R}$ und

$$r(h) = f(x+h) - f(x) - Mh.$$

Dann gilt für $h \neq 0$

$$\frac{r(h)}{h} = \frac{f(x+h) - f(x) - Mh}{h}$$

$$= \frac{f(x+h) - f(x)}{h} - M$$

D.h.

$$0 = \lim_{\substack{h \to 0 \\ h \neq 0}} \frac{r(h)}{h} = \lim_{\substack{h \to 0 \\ h \neq 0}} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} - M$$

$$\Leftrightarrow M = \lim_{\substack{h \to 0 \\ h \neq 0}} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$ ☐

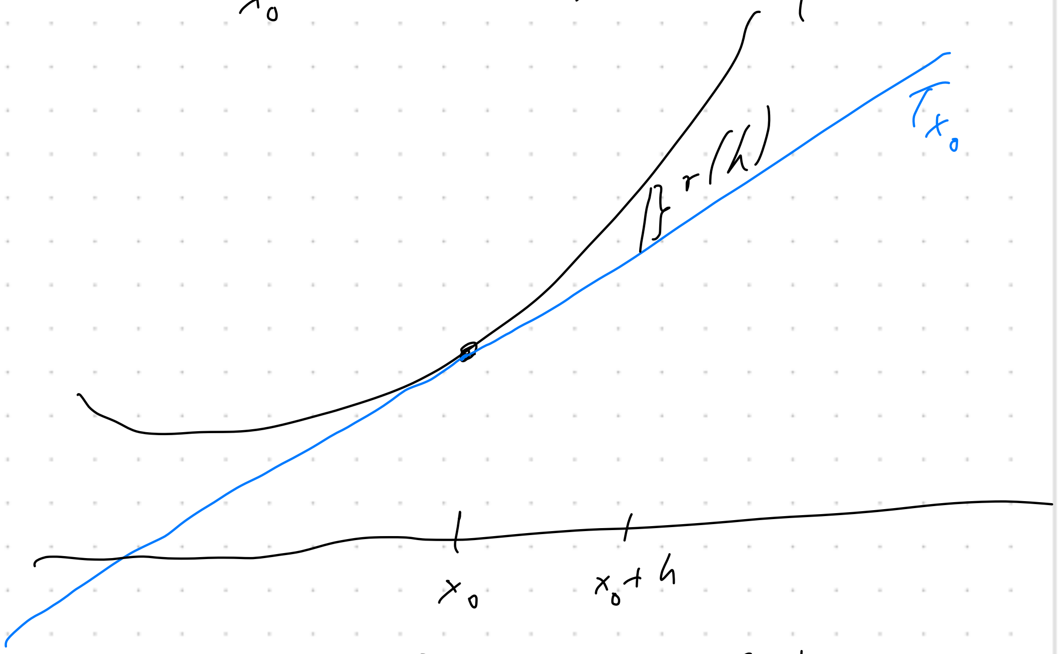
Sei f diff.bar in $x_0 \in D$ und

$$T_{x_0}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad T_{x_0}(x) := f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

$$\Leftrightarrow \quad T_{x_0}(x_0 + h) := f(x_0) + f'(x_0)h$$

(147) Es gilt

$$T_{x_0}(x_0) = f(x_0)$$



$$f(x_0+h) - T_{x_0}(x_0+h) = r(h)$$

$$\Leftrightarrow f(x) - T_{x_0}(x) = r(x-x_0)$$

Bem: $\boxed{\lim_{\substack{h\to 0\\ h\neq 0}} \frac{r(h)}{h} = 0 \Rightarrow \lim_{\substack{h\to 0\\ h\neq 0}} r(h) = 0}$

r(h) geht schneller gegen 0 als h

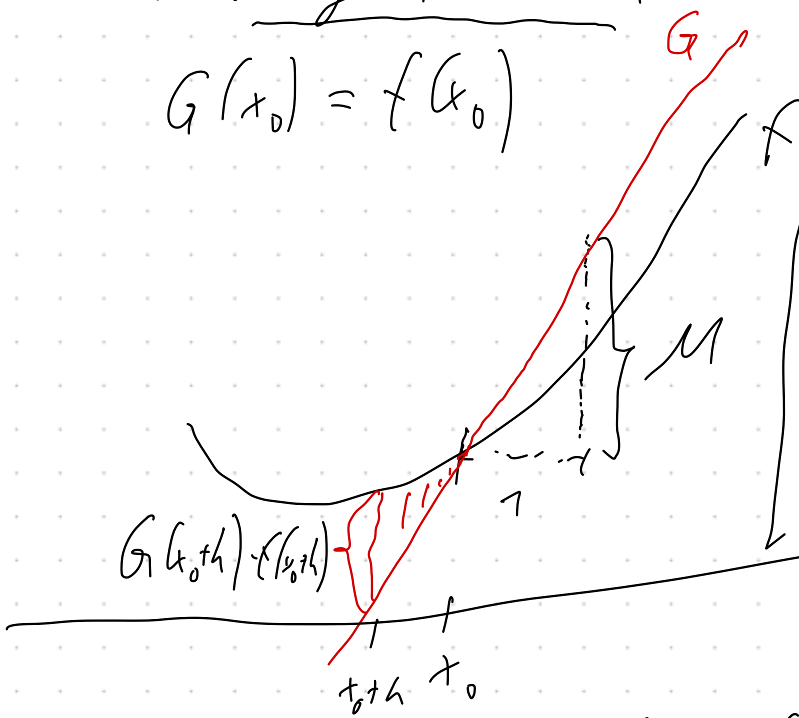
Warum reicht nicht $r(h) \to 0$?

Bsp: Sei f stetig und $G: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine affin lineare Fkt. mit

$$G(x) = f(x_0) + M(x-x_0)$$

mit irgendeinem $M \in \mathbb{R}$.

$$G(x_0) = f(x_0)$$



D.h. für $r(h) := f(x+h) - G(x+h)$ gilt $\lim_{\substack{h\to 0\\ h\neq 0}} r(h) = 0$.

$$|f(x) - G(x)| = |f(x) - f(x_0) - M(x-x_0)|$$
$$\leq |f(x) - f(x_0)| + |M|\,|x-x_0|$$
$$\xrightarrow[x\to x_0]{} 0 + 0 = 0$$

(148) Bspe

Achtung: immer $h \to 0, h \neq 0$

a) Konstante Fkt.en

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = c \quad , \quad c \in \mathbb{R}$

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{c - c}{h} = 0$$

b) lineare Fkt.

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = mx + b$

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{m(x+h) - mx}{h} = m$$

c) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = x^2$

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{x^2 + 2xh + h^2 - x^2}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} (2x + h) = 2x$$

d) $f: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{1}{x} = x^{-1}$

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h}\left(\frac{1}{x+h} - \frac{1}{x}\right)$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{x - x - h}{h(x+h)x} = \lim_{h \to 0} \frac{-1}{(x+h)x}$$

$$= \frac{-1}{x^2} = -x^{-2}$$

e) $\exp: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$\exp'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{\exp(x+h) - \exp(x)}{h}$$

$$= \exp(x) \lim_{h \to 0} \frac{\exp(h) - 1}{h}$$

$$= \exp(x) \lim_{h \to 0} \frac{1 + \frac{h}{1!} + \frac{h^2}{2!} + \frac{h^3}{3!} + \dots - 1}{h}$$

$$= \exp(x) \lim_{h \to 0} \left(\frac{1}{1!} + \frac{h}{2!} + \frac{h^2}{3!} + \dots\right)$$

$$= \exp(x) \, 1 = \exp(x)$$

149 **Korollar 124** Sei $f: D \to \mathbb{R}$ diff.bar in $x \in D$. Dann ist f stetig in x.

Beweis Nach Satz 123 gilt

$$f(y) = f(x) + f'(x)(y-x) + r(y-x)$$

mit $\frac{r(h)}{h} \xrightarrow[h \to 0]{} 0$, also

$$r(h) \xrightarrow[h\to 0]{} 0 \text{ bzw. } r(y-x) \xrightarrow[y \to x]{} 0$$

und somit

$$f(y) = \underbrace{f(x)}_{\to f(x)} + f'(x)\underbrace{(y-x)}_{\xrightarrow[y\to x]{} 0} + \underbrace{r(y-x)}_{\xrightarrow[y\to x]{} 0}$$

$$\xrightarrow[y \to x]{} f(x). \quad \square$$

Satz 125 Seien $f, g: D \to \mathbb{R}$ diff.bar in $x \in D$ und $\lambda \in \mathbb{R}$. Dann gilt:

a) $f+g: D \to \mathbb{R}$ diff.bar in x mit

$$(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x)$$

b) $(\lambda f): D \to \mathbb{R}$ diff.bar in x mit

$$(\lambda f)'(x) = \lambda f'(x)$$

c) $fg: D \to \mathbb{R}$ diff.bar in x mit

$$(fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

d) Sei $g(x) \neq 0 \ \forall x \in D$, dann $\frac{f}{g}: D \to \mathbb{R}$ ist diff.bar in x mit

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2}.$$

150 a) + b) Folgt direkt aus Grenzwertsätzen.

c) $(fg)'(x) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x)}{h}$

$= \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(x+h)-f(x)}{h} g(x) + f(x+h)\dfrac{g(x+h)-g(x)}{h}$

$= f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$

d) $\left(\dfrac{1}{g}\right)'(x) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{1}{h}\left(\dfrac{1}{g(x+h)} - \dfrac{1}{g(x)}\right)$

$= \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{g(x)-g(x+h)}{g(x+h)g(x)h}$

$= \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{-1}{g(x+h)g(x)} \cdot \dfrac{g(x+h)-g(x)}{h}$

$= \dfrac{-1}{g(x)^2}$ $g'(x) = \dfrac{-g'(x)}{g(x)^2}$

$\left(\dfrac{f}{g}\right)'(x) = \left(f\cdot\dfrac{1}{g}\right)'(x)$

$= f'(x)\dfrac{1}{g(x)} + f(x)\cdot\dfrac{-g'(x)}{g(x)^2}$

$= \dfrac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2}$ $\square$

Bem a) + b) Linearität

f' hängt linear von f ab.

c) „Produktregel"

d) „Quotientenregel"

Bsp a) $f(x) = x^n$ $n\in\mathbb{N}$. Beh $f'(x) = n x^{n-1}$

Induktion: $n=0$ $f(x) = x^0 = 1 \Rightarrow f'(x) = 0$

$n-1 \Rightarrow n$: $f(x) = x^n = x\cdot x^{n-1}$

$f'(x) = 1\cdot x^{n-1} + x\cdot(n-1)x^{n-2}$

$= (1+n-1)\,x^{n-1} = n x^{n-1}$.

157 b) $f(x) = x^{-n} = \frac{1}{x^n}$ $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$

$$f'(x) = \frac{-n x^{n-1}}{x^{2n}} = \frac{-n}{x^{n+1}} = -n x^{-n-1}$$

D.h. Für $n \in \mathbb{Z}$ und $f(x) = x^n$

$$f'(x) = n x^{n-1}$$

Bem Sei $f: D_1 \to \mathbb{R}$, $g: D_2 \to \mathbb{R}$

und $B_\varepsilon(x_0) \subseteq D_1$ und $B_\varepsilon(x_0) \subseteq D_2$

für ein $\varepsilon > 0$. Es gelte

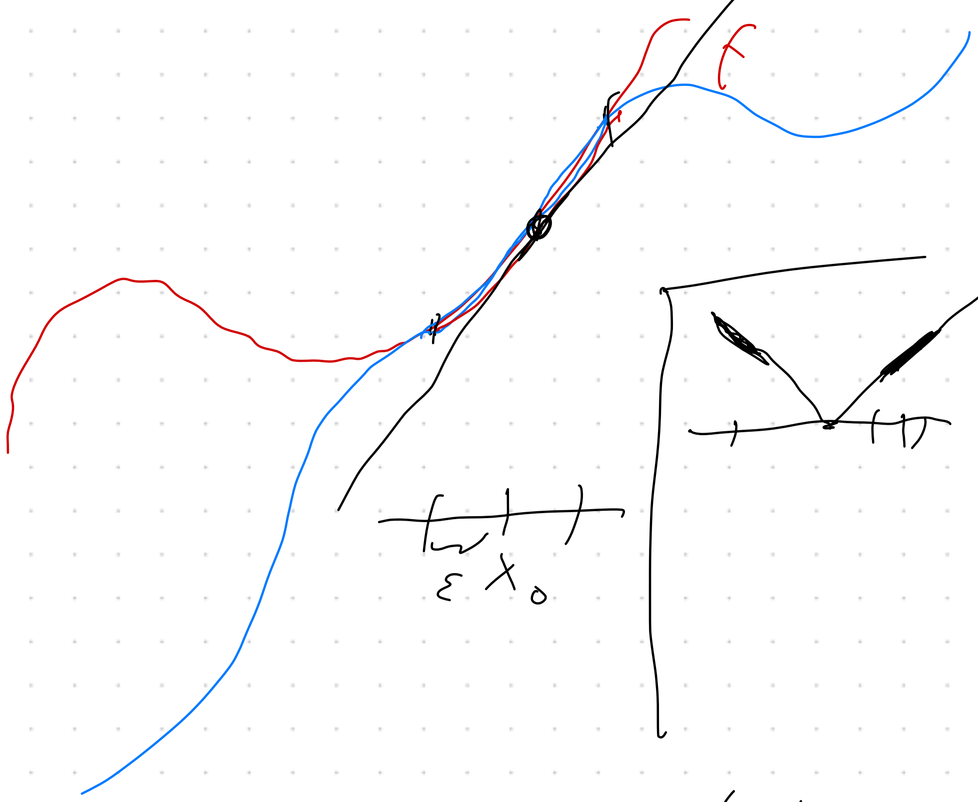
$$f(x) = g(x) \quad \forall x \in B_\varepsilon(x_0).$$

Dann gilt

f diff.bar in x_0 $\Longleftrightarrow$ g diff.bar in x_0

und $f'(x_0) = g'(x_0)$

D.h. f stetig in x $\not\Longrightarrow$ f diff.bar in x



Bsp $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = |x|$

1. Fall $x > 0$ $f'(x) = 1$

2. Fall $x < 0$ $f'(x) = -1$

3. Fall $x = 0$ Sei (h_n) Nullfolge

3a) $h_n > 0$: $\frac{f(x+h_n) - f(x)}{h_n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$

3b) $h_n < 0$: $\frac{f(x+h_n) - f(x)}{h_n} \xrightarrow[n\to\infty]{} -1$

Also: f nicht diff.bar in $x = 0$.