152 **Bisher**
- Summen, Vielfach
- Produkte
- Quotienten

von diff.baren Fkten.

Satz 126 Seien $f: U \to \mathbb{R}$ und $g: W \to \mathbb{R}$ mit $f(U) \subseteq W$. Sei f in $x \in U$ diff.bar und g in $y = f(x) \in f(U) \subseteq W$ diff.bar.
Dann ist
$$g \circ f : U \to \mathbb{R}$$
diff.bar in x und es gilt
$$(g \circ f)'(x) = g'(f(x))\, f'(x) = g'(y)\, f'(x).$$

Beweis: Def. die Fkt. $g^*: W \to \mathbb{R}$ durch
$$g^*(t) = \begin{cases} \dfrac{g(t) - g(y)}{t - y} & \text{falls } t \neq y, \\ g'(y) & \text{falls } t = y. \end{cases}$$

Dann gilt da g diff.bar in y

(1) $\lim_{t \to y} g^*(t) = g'(y) = g^*(y)$

und ferner

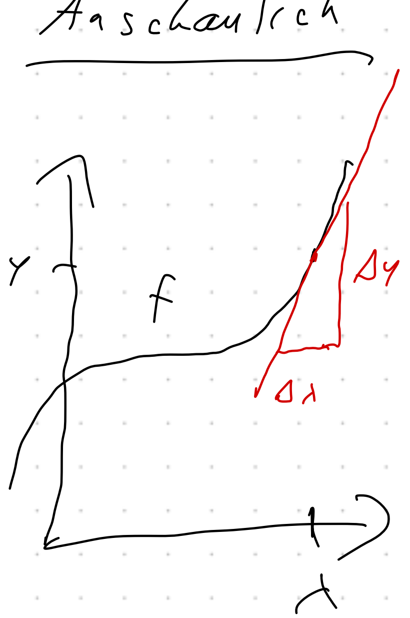
(2) $g(t) - g(y) = g^*(t)(t-y) \quad \forall t \in W.$

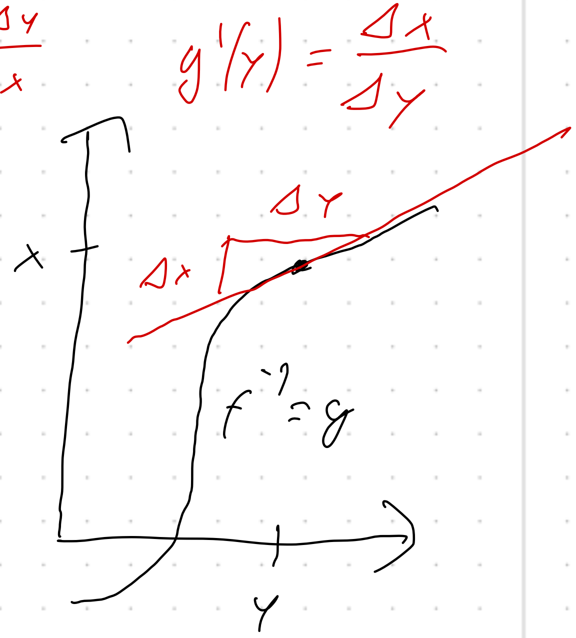
Somit
$$(g \circ f)'(x) = \lim_{\xi \to x} \frac{g(\overbrace{f(\xi)}^{t}) - g(\overbrace{f(x)}^{y})}{\xi - x} \overset{(2)}{=} \lim_{\xi \to x} \frac{g^*(f(\xi))\,(f(\xi) - f(x))}{\xi - x}$$
$$= \lim_{\xi \to x} g^*(f(\xi)) \lim_{\xi \to x} \frac{f(\xi) - f(x)}{\xi - x}$$
$$= g'(f(x))\, f'(x).$$ ☑

153 **Satz 127** Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein nichttriviales Intervall (d.h. $I \neq \{x\}$) und $f: I \to \mathbb{R}$ stetig und streng monoton wachsend. Mit $J = f(I)$ sei $g := f^{-1}: J \to \mathbb{R}$ die Umkehrfunktion. Ist f in $x \in I$ diff.bar und $f'(x) \neq 0$, so ist $g = f^{-1}$ in $y = f(x)$ diff.bar und

$$g'(y) = (f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}.$$

Anschaulich





Beweis Sei $y_n \in J$ mit $y_n \to y$ und $y_n \neq y$ $\forall n$. Setze

$$x_n := g(y_n) = f^{-1}(y_n).$$

Nach Satz 101 ist g stetig und es gilt $x_n = g(y_n) \to g(y) = x$.

Ferner gilt $x_n = g(y_n) \neq g(y) = x$ $\forall n$.

Also

$$\lim_{n\to\infty} \frac{g(y_n) - g(y)}{y_n - y} = \lim_{n\to\infty} \frac{x_n - x}{f(x_n) - f(x)}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\frac{f(x_n) - f(x)}{x_n - x}} = \frac{1}{\underbrace{\lim_{n\to\infty} \frac{f(x_n) - f(x)}{x_n - x}}_{\neq 0}}$$

$$= \frac{1}{f'(x)}, \text{ somit } g'(y) = \frac{1}{f'(x)}. \quad \boxtimes$$

15.4 **Bsp.**

a) $\exp: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ streng monoton wachsend, diff.bar $\forall x \in \mathbb{R}$, $\exp'(x) = \exp(x) \neq 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$.

Also gilt (Satz 12.7)

$\log: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ diff.bar $\forall y \in \mathbb{R}^+$

und
$$\log'(y) = \frac{1}{\exp'(\underbrace{\log(y)}_{x})} = \frac{1}{y}.$$

b) Sei $a \in \mathbb{R}$ und $f: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^a$

lt. def $f(x) = \exp(a \log(x))$, also

$$f'(x) = \exp'(a \log(x)) \cdot (a \log)'(x)$$
$$= \exp(a \log(x)) \cdot a \cdot \log'(x)$$
$$= x^a \cdot a \cdot \frac{1}{x} = a \cdot x^{a-1}.$$

c) Es gilt (Erinnerung $e := \exp(1)$)

$$\lim_{n \to \infty} n \log\left(1 + \frac{1}{n}\right) = \lim_{n \to \infty} \frac{\overbrace{\log\left(1 + \frac{1}{n}\right) - \log(1)}^{=0, \text{ da } \exp(0)=1}}{\frac{1}{n}} = \log'(1) = \frac{1}{1} = 1$$

Wegen $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \exp\left(n \log\left(1 + \frac{1}{n}\right)\right)$

gilt

$$\lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \lim_{n \to \infty} \exp\Big(\overbrace{n \log\left(1 + \frac{1}{n}\right)}^{\to 1}\Big)$$
$$= \exp(1) = e$$

$$\Rightarrow \ e = \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

(**Bisher** § 15, Forster
jetzt § 16, Forster)

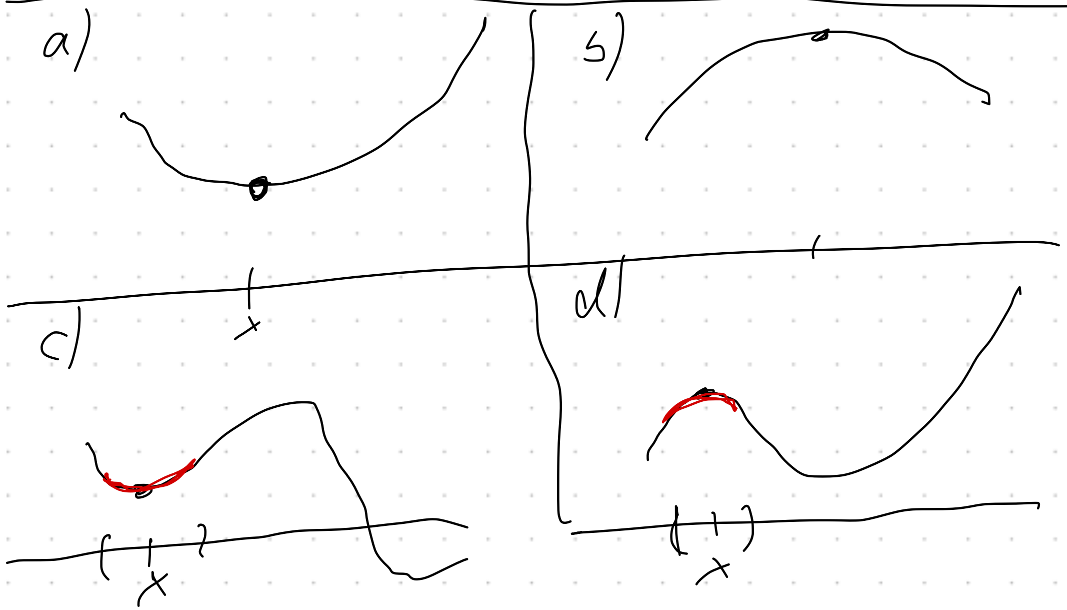
155 **Def 128** Sei $f: D \to \mathbb{R}$ mit $D \subseteq \mathbb{R}$ und $x \in D$. Dann heißt x ein

a) globales Minimum von $f \iff f(x) \le f(y) \; \forall y \in D$

b) globales Maximum von $f \iff f(x) \ge f(y) \; \forall y \in D$

c) lokales Minimum von f
$\iff \exists \varepsilon > 0 : f(x) \le f(y) \quad \forall y \in D \cap B_\varepsilon(y)$

d) lokales Maximum von f
$\iff \exists \varepsilon > 0 : f(x) \ge f(y) \quad \forall y \in D \cap B_\varepsilon(y)$



e) lokales (bzw globales) Extremum, wenn x lokales (bzw globales) Maximum oder Minimum ist.

Satz 129 Sei $f: (a,b) \to \mathbb{R}$ und $x \in (a,b)$ lokales Extremum. Ist f diff.bar in x, so gilt $f'(x) = 0$.

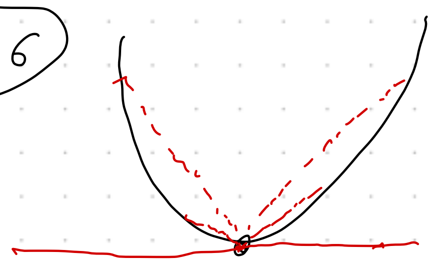
Beweis O.B.d.A sei x lokales Minimum (sonst betrachte $-f$). Sei $\varepsilon > 0$ mit
$B_\varepsilon(x) \subseteq (a,b) = D$
und $f(x) \le f(y) \quad \forall y \in D \cap B_\varepsilon(x) = B_\varepsilon(x)$.

Dann gilt

$$f'(x) = \lim_{n \to \infty} \frac{\overbrace{f\left(x + \frac{1}{n}\right) - f(x)}^{\ge 0 \text{ falls } n \text{ groß genug}}}{\underbrace{\frac{1}{n}}_{> 0}} \ge 0 \qquad \ge 0 \text{ falls } n \text{ groß genug}$$

$$f'(x) = \lim_{n \to \infty} \frac{\overbrace{f\left(x - \frac{1}{n}\right) - f(x)}}{\underbrace{-\frac{1}{n}}_{<0}} \le 0$$

$\Rightarrow f'(x) = 0$ $\square$



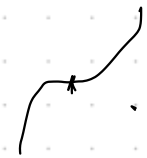
Bem Es gilt

x lokales Extremum $\Rightarrow f'(x) = 0$

aber

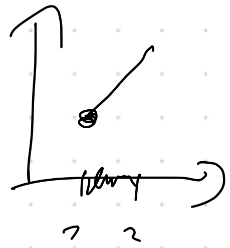
$f'(x) = 0 \not\Rightarrow x$ lokales Extremum

Bsp $f(x) = x^3$, dann $f'(x) = 3x^2$, also $f'(0) = 0$.



Bem Die Aussage gilt nicht $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ und $x = a$ oder $x = b$.

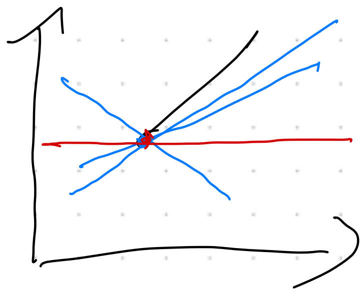
Bsp $f(x) = x$, $f: [1, 2] \to \mathbb{R}$

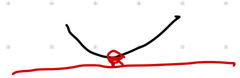


Ausblick: (Optimierung, Funktionalanalysis)

Verallgemeinerung von Ableitungen zu „Subgradienten": affine Minoranten

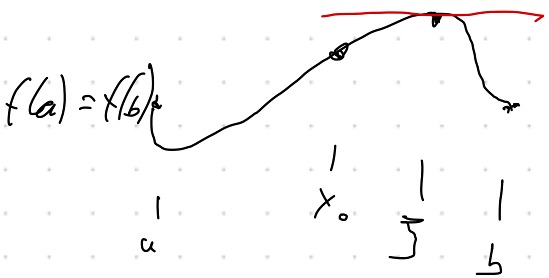
Dann: x Minimum $\Rightarrow g = 0$ ist Subgradient





157 **Satz 130** (Satz von Rolle)

Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, $a < b$ und $f(a) = f(b)$, f stetig in $[a,b]$ und diff.bar in (a,b). Dann ex. $\xi \in (a,b)$ mit $f'(\xi) = 0$.



Beweis 1. Fall f konstant $\Rightarrow$ fertig

2. Fall Es ex. $x_0 \in (a,b)$ mit $f(x_0) \neq f(a)$. OBdA sei $f(x_0) > f(a)$. Da f stetig in $[a,b]$ ex. ein globales Maximum $\xi \in [a,b]$. Wegen

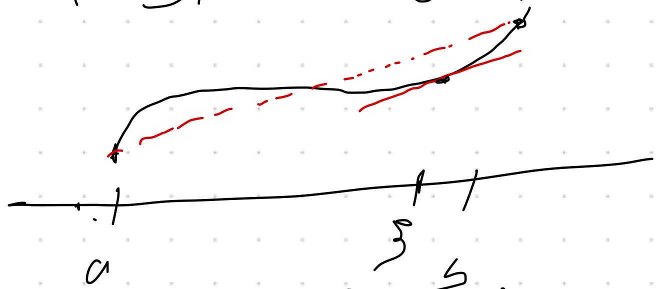
$$f(\xi) \geq f(x_0) > f(a) = f(b).$$

Also $\xi \in (a,b)$. Nach Satz 129 gilt $f'(\xi) = 0$. $\square$

Nach wichtiger:
Mittelwertsatz der Differentialrechnung

Korollar 131 Sei $a < b$, $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, f stetig in $[a,b]$, diff.bar (a,b). Dann ex. $\xi \in (a,b)$ mit

$$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b-a}.$$



Beweis Sei $m = \dfrac{f(b) - f(a)}{b-a}$ und $g(x) = f(x) - m(x-a)$

Dann $g(a) = f(a)$, $g(b) = f(b) - m(b-a) = f(a) = g(a)$

Also ex. nach Satz von Rolle $\xi \in (a,b)$ mit

$$0 = g'(\xi) = f'(\xi) - m, \text{ d.h.}$$

$$f'(\xi) = m = \frac{f(b) - f(a)}{b-a}. \quad \square$$

15.8 Anwendungen des MWS

Korollar 13.2 Sei $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ diff.bar und $f'(x)=0$ $\forall x\in(a,b)$, dann ist f konstant.

Beweis Seien $x,y\in(a,b)$ mit $x<y$.

Dann ex. $\xi\in(x,y)\subseteq(a,b)$ mit

$$0=f'(\xi)=\frac{f(y)-f(x)}{y-x},\text{ also } f(x)=f(y). \quad \boxtimes$$

Korollar 13.3 Sei $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ diff.bar mit $f'(x)\geq 0$ (bzw. >0) $\forall x\in(a,b)$.

Dann ist f monoton wachsend (bzw. streng monoton wachsend).

Beweis Seien $x,y\in(a,b)$ mit $x<y$.

Dann ex. $\xi\in(x,y)\subseteq(a,b)$ mit

$$0\leq f'(\xi)=\frac{f(y)-f(x)}{\underbrace{y-x}_{>0}}$$

(bzw. $0<$)

$\Rightarrow f(y)\geq f(x)$ (bzw. $f(y)>f(x)$). $\boxtimes$

Analog: $f'(x)\leq 0$ $\forall x \Rightarrow$ monoton fallend

$f'(x)<0$ $\forall x\Rightarrow$ streng —"—