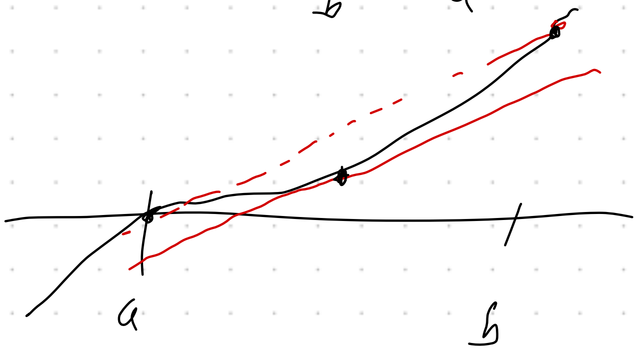
(159) Erinnerung: MWS

Sei $a<b$, $f:[a,b]\to\mathbb{R}$, f stetig auf $[a,b]$, diff. auf (a,b).

Dann ex. $\xi\in(a,b)$ mit

$$f'(\xi)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$



Proposition 134 Sei $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ diff.bar und monoton wachsend.

Dann gilt $f'(x)\geq 0 \;\forall x\in(a,b)$.

Beweis Monoton $\Rightarrow$ $\underline{h>0}$ $f(x+h)-f(x)\geq 0$

$\underline{h<0}$ $f(x+h)-f(x)\leq 0$

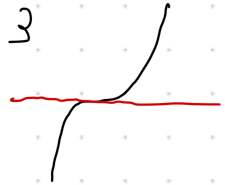
Also

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\underbrace{\frac{f(x+h)-f(x)}{h}}_{\geq 0}\geq 0.$$ ∎

Achtung! Es gilt nicht:

streng monoton wachsend $\Rightarrow f'(x)>0\;\forall x$

Bsp $f(x)=x^3$



Korollar 135 Sei $a<b$, $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ stetig in $[a,b]$, diff.bar in (a,b).

Es ex. $L>0$ mit

$$|f'(x)|\leq L\quad\forall x\in(a,b).$$

Dann ist f Lipschitz-stetig mit Konstante L.

Beweis Seien $x,y\in[a,b]$, oBdA $x<y$.

Dann ex. $\xi\in(x,y)\subseteq(a,b)$ mit

$$f'(\xi)=\frac{f(x)-f(y)}{x-y}$$

also

$$|f(x)-f(y)|=|f'(\xi)|\,|x-y|\leq L|x-y|.$$ ∎

160 Ableitung höherer Ordnung

Def 136 Sei $f: D \to \mathbb{R}$, dann heißt f k-mal diff. mit $k \geq 0$ wenn gilt

$k=0$: immer

$k=1$: wenn f diff.bar

$k>1$: wenn f diff.bar und f' $(k-1)$-mal diff.bar

Die k-te Ableitung wird mit

$f^{(k)}: D \to \mathbb{R}$ bezeichnet.

f heißt k-mal stetig diff.bar, wenn $f^{(k)}$ zusätzlich stetig ist.

Notation:

$$f^{(k)}(x) = \frac{d^k f(x)}{dx^k} = \frac{d}{dx} \frac{d^{k-1} f(x)}{dx^{k-1}}.$$

$$f^{(0)} := f, \quad f^{(1)} = f', \quad f^{(2)} = f''$$

Bem: f, g k-mal diff.bar

a) $f+g$, $f-g$, $f \cdot g$ k-mal diff.bar

b) $g(x) \neq 0 \; \forall x \Rightarrow \frac{f}{g}$ k-mal diff.bar

c) $g \circ f$ k-mal diff.bar

Bem: $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig diff.bar. Dann $f': [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig. Dann ex. $L \geq 0$ mit $|f'(x)| \leq L \; \forall x$.
Also ist f Lipschitz-stetig

161 Konvexität

Def 137 Sei $D \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und $f: D \to \mathbb{R}$. Dann heißt f konvex, wenn gilt:

(*) $f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y)$ $\forall x,y \in D, \lambda \in [0,1]$.

f heißt strikt konvex, wenn für $x \neq y$ und $\lambda \in (0,1)$ gilt in (*) „<".

f heißt (strikt) konkav, wenn $-f$ (strikt) konvex ist.

Bedeutung

$\xi = \lambda x + (1-\lambda)y = y + \lambda(x-y)$

durchläuft für $\lambda \in [0,1]$ alle Punkte zwischen x und y.

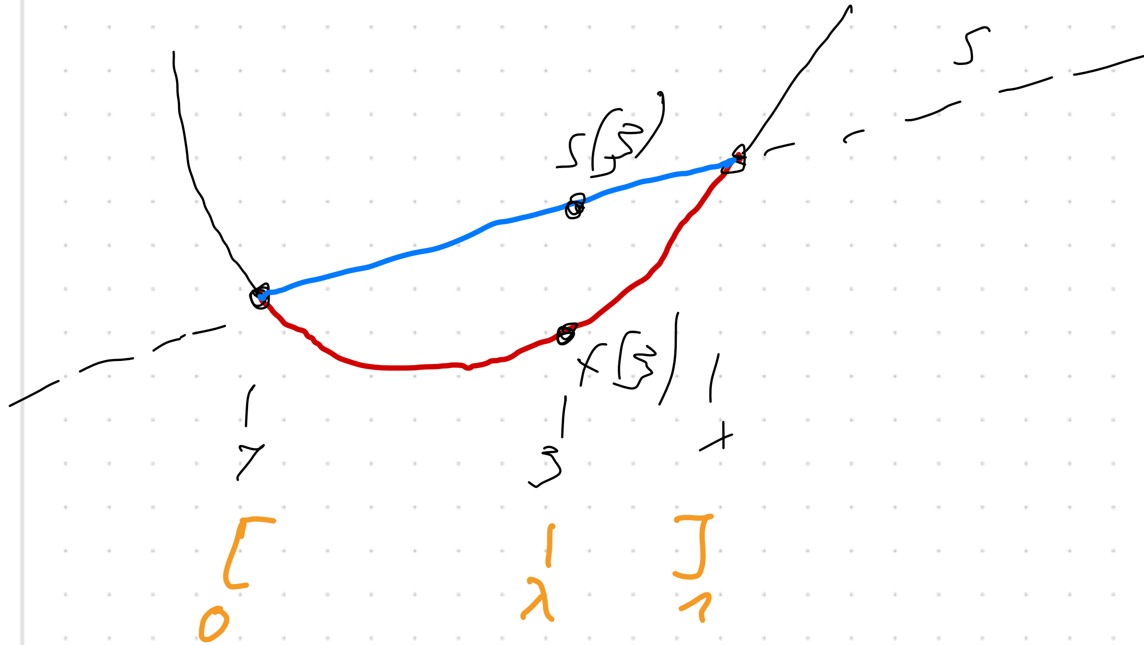
Sei $s(\xi) = f(y) + \dfrac{f(x)-f(y)}{x-y}(\xi - y)$

Dann gilt für $\xi = \lambda x + (1-\lambda)y$ $(x \neq y)$
$= y + \lambda(x-y)$

$\lambda = \dfrac{\xi - y}{x-y}$ und somit

$s(\xi) = \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y)$

Also f konvex $f(\xi) \leq s(\xi)$

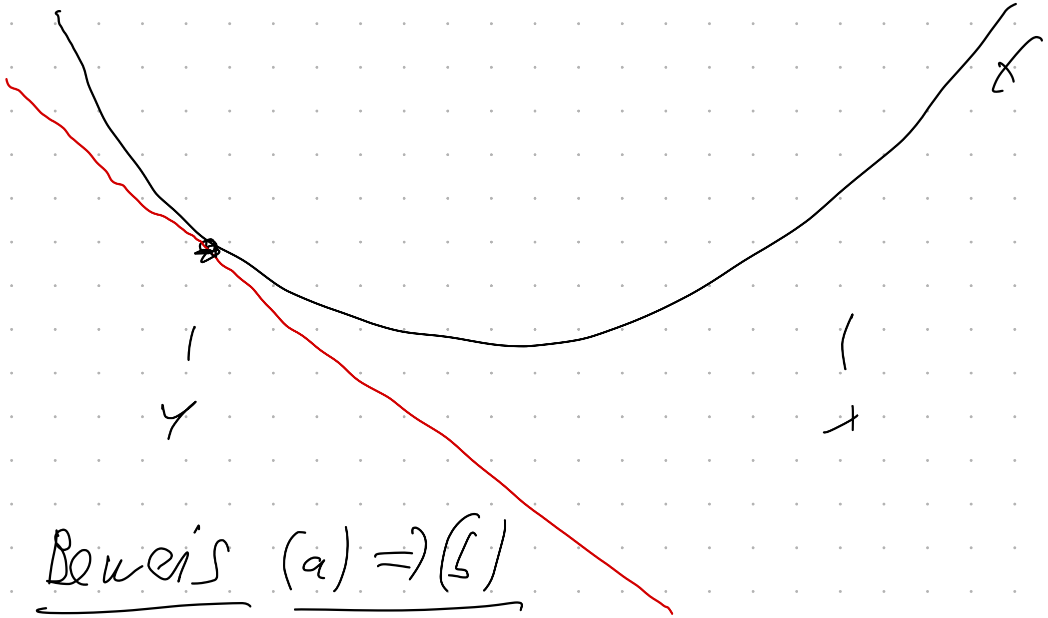


(162) **Satz 138** Sei $D \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und $f: D \to \mathbb{R}$ diff.bar. Dann sind äquivalent!

(a) f ist konvex

(b) $\underline{f(y) + f'(y)(x-y)} \leq f(x) \; \forall x, y \in D$

(c) f' ist monoton wachsend.



Bem

$$f(\lambda x + (1-\lambda) y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y) \quad \forall x,y \in D, \lambda \in [0,1]$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$\frac{f(y+\lambda(x-y)) - f(y)}{\lambda(x-y)} \leq \frac{f(x)-f(y)}{x-y}$$

$\forall x > y, \lambda \in (0,1)$

Beweis (a) $\Rightarrow$ (b)

sei $x \neq y$, dann

$$\frac{f(y+\lambda(x-y)) - f(y)}{\underbrace{\lambda(x-y)}_{h}} (x-y) \leq f(x) - f(y)$$

$$\overset{\lambda \to 0}{\Longrightarrow} \quad f'(y)(x-y) \leq f(x) - f(y) \quad \checkmark$$

(b) $\Rightarrow$ (c) Sei $x < y$, dann gilt

$$\left.\begin{array}{l} f'(y)(x-y) \leq f(x) - f(y) \\ f'(x)(y-x) \leq f(y) - f(x) \end{array}\right\} +$$

$$(f'(x) - f'(y))(y-x) \leq 0 \quad \Big| : (y-x)$$

$$f'(x) - f'(y) \leq 0 \quad \checkmark$$

163 $(c) \Rightarrow (a)$: Sei $x \neq y$, $\lambda \in (0,1)$ und $z = \lambda x + (1-\lambda) y = y + \lambda(x-y)$

OBdA sei $y < x$. Dann $y < z < x$.

Nach MWS ex. $\xi_1 \in (y,z)$ und $\xi_2 \in (z,x)$ mit

$$f'(\xi_1) = \frac{f(z) - f(y)}{z-y} \quad \text{und} \quad f'(\xi_2) = \frac{f(x) - f(z)}{x-z}$$

Aus Monotonie von f' und $y < \xi_1 < z < \xi_2 < x$ folgt

$$\frac{f(z) - f(y)}{\underbrace{\lambda(x-y)}_{z-y}} = f'(\xi_1) \leq f'(\xi_2) = \frac{f(x) - f(z)}{\underbrace{(1-\lambda)(x-y)}_{x-z}} \Bigg| \cdot \underbrace{\lambda(1-\lambda)(x-y)}_{>0}$$

$$f(z) - f(y) - \lambda\big(f(z) - f(y)\big) \leq \lambda\big(f(x) - f(z)\big)$$

$$f(\lambda x + (1-\lambda) y) = f(z) \leq f(y) + \lambda\big(f(x) - f(y)\big)$$
$$= \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y).$$

$\blacksquare$

(164) **Satz 139** Sei $D \subseteq \mathbb{R}$ ein offenes Intervall und $f: D \to \mathbb{R}$ zweimal diff.bar. Dann sind äquivalent:

(a) f konvex

(b) $f(y) + f'(y)(x-y) \leq f(x) \; \forall x,y \in D$

(c) f' ist monoton wachsend

(d) $f''(x) \geq 0 \; \forall x \in D$.

Beweis (a)$\Leftrightarrow$(b)$\Leftrightarrow$(c) Satz 138.

(c) $\Rightarrow$ (d) Prop 134 für f'

(d) $\Rightarrow$ (c) Korollar 133 für f' ☒

Satz 140 Sei $D \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall, $f: D \to \mathbb{R}$ konvex und diff.bar. Gilt $f'(x) = 0$ für ein $x \in D$, so ist x ein globales Minimum von f in D.

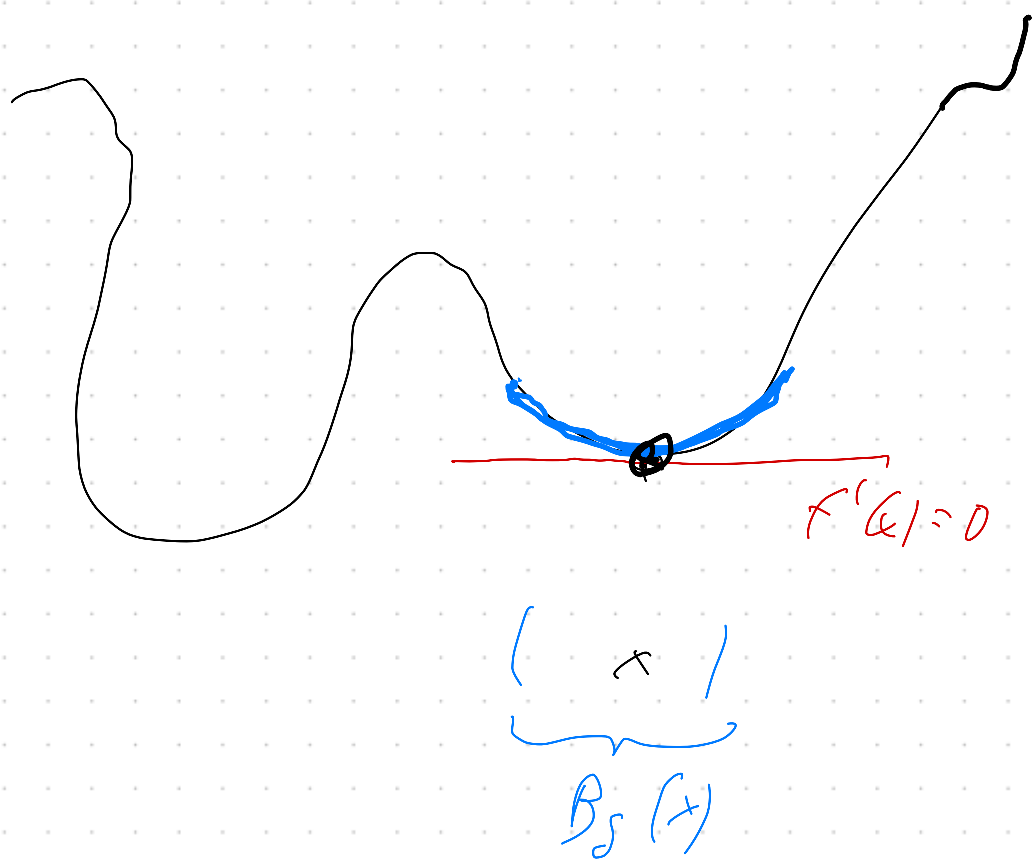
Beweis Aus Satz 138(b) folgt:

$$f(x) = f(x) + \underbrace{f'(x)(y-x)}_{=0} \overset{(b)}{\leq} f(y) \quad \forall y \in D$$ ☒

(165) Korollar 141 Sei $D \subseteq \mathbb{R}$, $f: D \to \mathbb{R}$, $B_\varepsilon(x) \subseteq D$, $x \in D$, $\varepsilon > 0$ und f zweimal stetig diff.bar in $B_\varepsilon(x)$ und

$$f'(x) = 0, \quad f''(x) > 0.$$

Dann ist x ein lokales Minimum.



Beweis: Da f'' stetig ex. $0 < \delta \leq \varepsilon$ mit $f''(y) > 0$ $\forall y \in B_\delta(x) \subseteq B_\varepsilon(x)$.

Nach Satz 139 (d) ist f in $B_\delta(x)$ konvex. Also ist x nach Satz 140 ein „globales" Minimum in $B_\delta(x)$, d.h. ein lokales Minimum von f in D.