166 Verallgemeinerung:

Satz 192 Sei $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ diff.bar in (a,b) und zweimal diff.bar in $x\in(a,b)$ und

$$f'(x)=0 \text{ und } f''(x)>0 \ (\text{bzw. } <0).$$

Dann ist x ein lokales Minimum (bzw. Maximum)

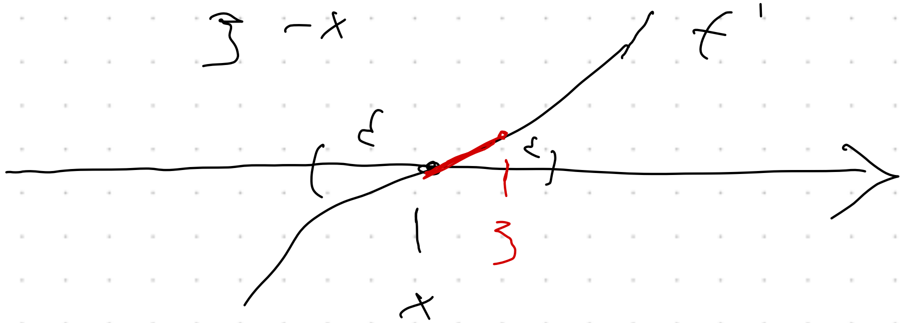
Beweis OBdA $f''(x)>0$.

Wegen

$$0<f''(x)=\lim_{\xi\to x}\frac{f'(\xi)-f'(x)}{\xi-x}$$

ex. $\varepsilon>0$ mit

$$\frac{f'(\xi)-f'(x)}{\xi-x}>0 \quad \forall \xi\in B_\varepsilon(x)\setminus\{x\}.$$



Wegen $f'(x)=0$ gilt

$$f'(\xi)<0 \quad \forall \xi\in(x-\varepsilon,x),$$

$$f'(\xi)>0 \quad \forall \xi\in(x,x+\varepsilon)$$

(da $\xi\in(x,x+\varepsilon)\Rightarrow \xi\in B_\varepsilon(x)\setminus\{x\}$

und $\xi>x\Rightarrow \xi-x>0$

$\Rightarrow f'(\xi)-f'(x)=f'(\xi)>0$).

Nach Korollar 153 ist f streng monoton fallend in $(x-\varepsilon,x)$ und streng monoton wachsend in $(x,x+\varepsilon)$.

Also ist x Minimum. ∎

Bem: Das Minimum ist sogar strikt, d.h. $\exists\delta>0$

$$f(x)<f(y) \quad \forall y\in B_\delta(x)\setminus\{x\}.$$

(167) Nachtrag (zur Konvergenz von Folgen und Funktionen)

Def 143 Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{R}$.

Dann heißen

$$\limsup_{n\to\infty} a_n = \overline{\lim_{n\to\infty}} a_n = \lim_{n\to\infty}\left(\sup\{a_k \mid k\geq n\}\right)$$

und

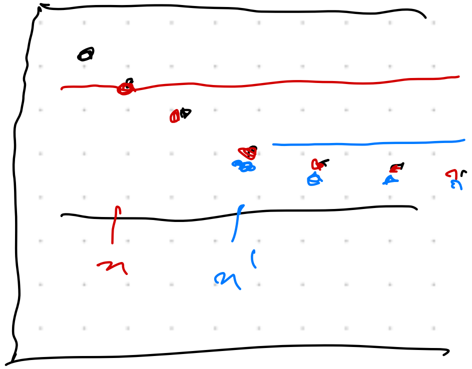
$$\liminf_{n\to\infty} a_n = \underline{\lim_{n\to\infty}} a_n = \lim_{n\to\infty}\left(\inf\{a_k \mid k\geq n\}\right)$$

der Limes superior bzw Limes inferior von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Bem $\{a_k \mid k\geq n\}$ wird immer „kleiner", d.h. für $n<n'$ gilt

$$\{a_k \mid k\geq n\} \supseteq \{a_k \mid k\geq n'\}$$

Also ist die Folge $\sup\{a_k \mid k\geq n\}$ monoton fallend.



Somit ex. $\lim_{n\to\infty}\left(\sup\{a_k \mid k\geq n\}\right)\in\mathbb{R}\cup\{-\infty,\infty\}$ immer.

1. Fall: $a_n\to-\infty$, dann $\overline{\lim_{n\to\infty}} a_n=-\infty$

2. Fall: a_n ist nach oben unbeschränkt, dann $\overline{\lim_{n\to\infty}} a_n=\infty$

3. Fall sonst: $\overline{\lim_{n\to\infty}} a_n\in\mathbb{R}$.

168

Analog

1. Fall $a_n \to \infty$, dann $\underline{\lim}_{n\to\infty} a_n = \infty$

2. Fall a_n nach unten unbeschränkt, dann $\underline{\lim}_{n\to\infty} a_n = -\infty$

3. Fall sonst $\underline{\lim}_{n\to\infty} a_n \in \mathbb{R}$.

Lemma 144 Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{R}$ und beschränkt. Sei ferner

$$H = \{x \in \mathbb{R} \mid x \text{ ist Häufungspunkt von } (a_n)\}.$$

Dann gilt

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\, a_n = \sup(H), \quad \underline{\lim}_{n\to\infty}\, a_n = \inf(H).$$

Beweis: Übung.

Lemma 145 Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{R}$ dann gilt:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \iff \overline{\lim_{n\to\infty}}\, a_n = \underline{\lim}_{n\to\infty}\, a_n = a \in \mathbb{R}$$

Beweis „$\Rightarrow$": Es gelte $\lim_{n\to\infty} a_n = a$.

Dann ist (a_n) beschränkt und a ist der einzige HP von a_n.

Nach Lemma 144 gilt ($H = \{a\}$)

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\, a_n = \sup\{a\} = a = \inf\{a\} = \underline{\lim}_{n\to\infty}\, a_n.$$

„$\Leftarrow$": Da $\underline{\lim}_{n\to\infty} a_n = a = \overline{\lim_{n\to\infty}}\, a_n \in \mathbb{R}$, muß (a_n) beschränkt sein.

Also gilt nach Lemma 144

$$\inf(H) = \underline{\lim}\, a_n = a = \overline{\lim}\, a_n = \sup(H)$$

$\Rightarrow H = \{a\}$.

(15g) Also ist a der einzige HP von a_n. Somit muß a_n gegen a konvergieren.

Sonst gilt: $\exists \varepsilon > 0 \ \forall n_0 : \exists n \geq n_0$ mit $|a_n - a| > \varepsilon$. (*)

Also ex. TF (a_{n_k}) mit $|a_{n_k} - a| > \varepsilon \ \forall k$.

Da (a_n) beschränkt, muß auch (a_{n_k}) beschränkt sein.

Nach Bolzano-Weierstraß ex. TF $(a_{n_{k_\ell}})$ von (a_{n_k}) und $a' \in \mathbb{R}$ mit $a_{n_{k_\ell}} \xrightarrow[\ell \to \infty]{} a'$.

Wegen (*) gilt $|a' - a| \geq \varepsilon > 0$, d.h. $a' \neq a$. Da $(a_{n_{k_\ell}})$ auch eine TF von (a_n) ist, ist a' ein HP von (a_n). Also $a' \in H$.

↯ zu $H = \{a\}$. ☒

Bsp: • $a_n = (-1)^n = \begin{cases} 1 & n \text{ gerade} \\ -1 & n \text{ ungerade} \end{cases}$

$\overline{\lim}\, a_n = 1$, $\underline{\lim}\, a_n = -1$

• $a_n = \begin{cases} n & \text{für } n \text{ gerade} \\ 42 & n \text{ ungerade} \end{cases}$

$\overline{\lim}\, a_n = \infty$, $\underline{\lim}\, a_n = 42$

17.0 Landau-Symbole

Notation Für $f,g : (a,\infty) \to \mathbb{R}$ schreiben wir
$$f(x) = o(g(x)) \quad x \to \infty$$
falls $\forall \varepsilon > 0 \ \exists R > 0$:

(*) $|f(x)| \leq \varepsilon |g(x)| \quad \forall x \geq R$

[**Ang** $g(x) \neq 0 \ \forall x \geq R_0$, dann

(*) $\Leftrightarrow \lim\limits_{x \to \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$]

$$f(x) = O(g(x)) \text{ für } x \to \infty$$
falls $\exists K \geq 0, R > 0$ mit

(**) $|f(x)| \leq K |g(x)| \quad \forall x \geq R$.

Ang $g(x) \neq 0 \ \forall x \geq R_0$, dann

(**) $\Leftrightarrow \limsup\limits_{x \to \infty} \left| \frac{f(x)}{g(x)} \right| < \infty$.

Für $f,g : D \to \mathbb{R}$, 0 HP von D.

schreiben wir
$$f(x) = o(g(x)) \quad x \to 0$$
falls $\forall \varepsilon > 0 \ \exists R > 0$

(***) $|f(x)| \leq \varepsilon |g(x)| \quad \forall |x| < R$.

[**Ang** $g(x) \neq 0 \ \forall x$, dann

(***) $\Leftrightarrow \lim\limits_{x \to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$.]

Bem $f'(x) = \lim\limits_{\substack{h \to 0 \\ h \neq 0}} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$

$\Leftrightarrow f(x+h) = f(x) + h f'(x) + r(h)$

mit $\lim\limits_{h \to 0} \frac{r(h)}{h} = 0$,

d.h. $r(h) = o(h)$ für $h \to 0$.

171

Def 146 Sei $f: D \to \mathbb{R}$.

a) Sei a Berührpunkt von $D \cap (a, \infty)$

$$\lim_{x \searrow a} f(x) = c \iff \begin{cases} \lim_{n\to\infty} f(x_n) = c \\ \text{für alle Folgen } x_n \in D \\ x_n \to a,\ x_n > a \ \forall n. \end{cases}$$

b) Sei a Berührpunkt von $D \cap (-\infty, a)$

$$\lim_{x \nearrow a} f(x) = c \iff \begin{cases} \lim_{n\to\infty} f(x_n) = c \\ \text{für alle Folgen } x_n \in D \\ x_n \to a,\ x_n < a \ \forall n. \end{cases}$$

Lemma 147

a) Sei $f: (a, 0) \to \mathbb{R}$ diff.bar mit
$\lim_{x \nearrow 0} f(x) = 0$ und $\lim_{x \nearrow 0} f'(x) = c \in \mathbb{R}$.

Dann gilt $\lim_{x \nearrow 0} \frac{f(x)}{x} = c$.

b) Sei $f: (a, \infty) \to \mathbb{R}$ diff.bar mit
$\lim_{x \to \infty} f'(x) = c \in \mathbb{R}$.

Dann gilt $\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} = c$.

Beweis b) Forster §16

a) Übung.

(172) **Satz 148** (Regel von de l'Hospital)

Sei $I = (a,b)$ ein Intervall mit $-\infty \le a < b \le +\infty$ und $f, g : I \to \mathbb{R}$ diff.bar. Es gelte $g'(x) \neq 0 \ \forall x \in I$ und der Limes

$$\lim_{x \nearrow b} \frac{f'(x)}{g'(x)} = c \in \mathbb{R}$$

existiere. Dann gilt

a) Falls $\lim\limits_{x \nearrow b} g(x) = 0 = \lim\limits_{x \nearrow b} f(x)$,

dann $g(x) \neq 0 \ \forall x \in I$ und

$$\lim_{x \nearrow b} \frac{f(x)}{g(x)} = c.$$

b) Falls $\lim\limits_{x \nearrow b} g(x) = \pm\infty$, dann

$g(x) \neq 0 \ \forall x \ge x_0 \ (x_0 \in (a,b))$

und $$\lim_{x \nearrow b} \frac{f(x)}{g(x)} = c.$$

Bsp a) $$\lim_{x \to \infty} \frac{x^n}{\exp(x)} = \lim_{x \to \infty} \frac{n x^{n-1}}{\exp(x)}$$

$$= \ldots = \lim_{x \to \infty} \frac{n!}{\exp(x)} = 0$$

b) $\underline{a > 0}$

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\log(x)}{x^a} = \lim_{x \to \infty} \frac{1}{x \, a \cdot x^{a-1}}$$

$$= \lim_{x \to \infty} \frac{1}{a x^a} = 0$$

c) $$\lim_{x \to \infty} \frac{x^n}{x^m} = \lim_{x \to \infty} \frac{n!}{m(m-1) \cdot \ldots \cdot (m-n+1)\, x^{m-n}}$$

mit $n < m$

$$= 0$$