(17.2) Erinnerung: Satz von de l'Hospital Beweis

Satz 17.48 Sei $I=(a,b)$, $-\infty \le a < b \le \infty$,

$f,g: I \to \mathbb{R}$ diff.bar, $g'(x) \neq 0 \ \forall x \in I$

und $\lim\limits_{x \nearrow b} \frac{f'(x)}{g'(x)} = c \in \mathbb{R}$ ex.

a) Falls $\lim\limits_{x \nearrow b} g(x) = \lim\limits_{x \nearrow b} f(x) = 0$, dann

$g(x) \neq 0 \ \forall x \in I$ und

$$\lim_{x \nearrow b} \frac{f(x)}{g(x)} = c = \lim_{x \nearrow b} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

b) Falls $\lim\limits_{x \nearrow b} g(x) = \pm\infty$, dann

$g(x) \neq 0 \ \forall x \ge x_0$ wobei $x_0 \in (a,b)$

und

$$\lim_{x \nearrow b} \frac{f(x)}{g(x)} = c = \lim_{x \nearrow b} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

1. Schritt $g: I \to \mathbb{R}$ ist injektiv:

Ang: $g(x_1) = g(x_2)$ und $a < x_1 < x_2 < b$,

dann ex. $\xi \in (x_1, x_2)$ mit $g'(\xi) = 0$. ↯.

2. Schritt Also ist g streng monoton

und $g'(x)$ hat keinen Vorzeichenwechsel.

OBdA g streng monoton wachsend.

(sonst betrachte $-g$)

3. Schritt

Sei $J = g(I)$. Setze

$\varphi = g^{-1}: J \to I$

und

$F = f \circ \varphi = f \circ g^{-1}: J \to \mathbb{R}$

Dann gilt

$$F'(y) = f'(\varphi(y))\varphi'(y) = \frac{f'(\varphi(y))}{g'(\varphi(y))},$$

(173)

4. Schritt Sei $A = \lim_{x \to a} g(x) \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$

a) $g(I) = J = (A, 0)$

b) $g(I) = J = (A, \infty)$

Setze $z = \begin{cases} 0 & a) \\ \infty & b) \end{cases}$, d.h. $J = (A, z)$.

Dann gilt

$$\lim_{y \to z} \varphi(y) = b$$

und nach Voraussetzung

$$\lim_{y \to z} F'(y) = \lim_{y \to z} \frac{f'(\varphi(y))}{g'(\varphi(y))} = C$$

5. Schritt

Nach Lemma 147 a)/b)

$$\lim_{y \to z} \frac{F(y)}{y} = C$$

a) $z = 0$ und

$$\lim_{y \to z} F(y) = \lim_{y \to z} f(g^{-1}(y)) = \lim_{x \to b} f(x) = 0$$

b) $z = \infty$ ✓

Sei nun $x_n \in (a, b)$ mit $\lim_{n \to \infty} x_n = b$ bel.

Setze $y_n = g(x_n)$, dann $\lim_{n \to \infty} y_n = \lim_{n \to \infty} g(x_n) = z$.

Also

$$\lim_{n \to \infty} \frac{f(x_n)}{g(x_n)} = \lim_{n \to \infty} \frac{F(\overbrace{\varphi(y_n)}^{x_n})}{y_n} = \lim_{n \to \infty} \frac{F(y_n)}{y_n} = C.$$

☒

(17) Komplexe Zahlen

Wir betrachten die Menge
$\mathbb{C} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$
und definieren dort die

Komplexe Addition

$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) := (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$$

Komplexe Multiplikation

$$(x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2) := (x_1 x_2 - y_1 y_2, x_1 y_2 + x_2 y_1)$$

Satz 149 $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ ist ein Körper mit $0 = (0,0)$ und $1 = (1,0)$.

Beweis Übung.

Def 150 Auf $\mathbb{C}$ def.

Die imaginäre Einheit $i := (0,1) \in \mathbb{C}$,
$\mathrm{Re}: \mathbb{C} \to \mathbb{R}$, $\mathrm{Re}(x,y) = x$ (Realteil von (x,y))
$\mathrm{Im}: \mathbb{C} \to \mathbb{R}$, $\mathrm{Im}(x,y) = y$ (Imaginärteil von (x,y))

Lemma 151 Seien $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, dann gilt

a) $(x_1, 0) + (x_2, 0) = (x_1 + x_2, 0)$

b) $(x_1, 0) \cdot (x_2, 0) = (x_1 x_2, 0)$

c) $(0, x_1) + (0, x_2) = (0, x_1 + x_2)$

d) $(0, x_1) \cdot (0, x_2) = (-x_1 x_2, 0)$

e) $i^2 = i \cdot i = (0,1) \cdot (0,1) = (-1, 0)$ $\boxed{i^2 = -1}$

Wegen a), b) können wir $x \in \mathbb{R}$ mit $(x,0) \in \mathbb{C}$ und $\mathbb{R}$ mit $\{(x,0) \mid x \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathbb{C}$ identifizieren. Dann gilt für $z \in \mathbb{C}$

$$z = (x,y) = (x,0) + (0,y) = (x,0) + (y,0)\cdot(0,1)$$
$$= x + yi = \mathrm{Re}(z) + i \cdot \mathrm{Im}(z).$$

(175) Multiplikation von

$x_1 + iy_1,\ x_2 + iy_2 \in \mathbb{C},\ x_1, y_1, x_2, y_2 \in \mathbb{R}$

$$(x_1 + iy_1)\cdot(x_2 + iy_2)$$
$$= x_1x_2 + i^2 y_1y_2 + ix_1y_2 + ix_2y_1$$
$$= \underbrace{(x_1x_2 - y_1y_2)}_{\mathbb{R}} + i\underbrace{(x_1y_2 + x_2y_1)}_{\mathbb{R}}$$
$$= (x_1x_2 - y_1y_2,\ x_1y_2 + x_2y_1)$$

Für $z \in \mathbb{C}$ mit $z = x + iy,\ x, y \in \mathbb{R}$

heißt $\bar{z} = x - iy = \mathrm{Re}(z) - i\,\mathrm{Im}(z)$

die <u>komplex konjugierte</u> von z

$$\mathrm{Re}(z) = \frac{1}{2}(z + \bar{z})$$
$$\mathrm{Im}(z) = \frac{1}{2i}(z - \bar{z})$$
$$\bar{\bar{z}} = z$$

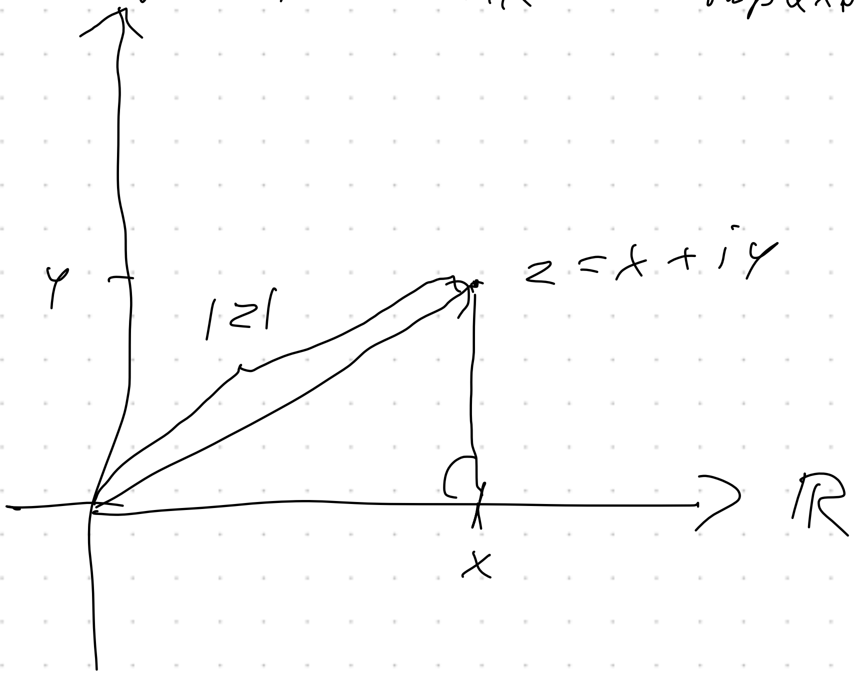
$$\overline{z + w} = \bar{z} + \bar{w}$$
$$\overline{z \cdot w} = \bar{z}\cdot\bar{w}$$
$$z\cdot\bar{z} = (x + iy)(x - iy)$$
$$= x^2 - i^2y^2 - ixy + ixy$$
$$= x^2 + y^2 \in \mathbb{R}$$

Der <u>Betrag</u> von $z = x + iy \in \mathbb{C}\ (x, y \in \mathbb{R})$

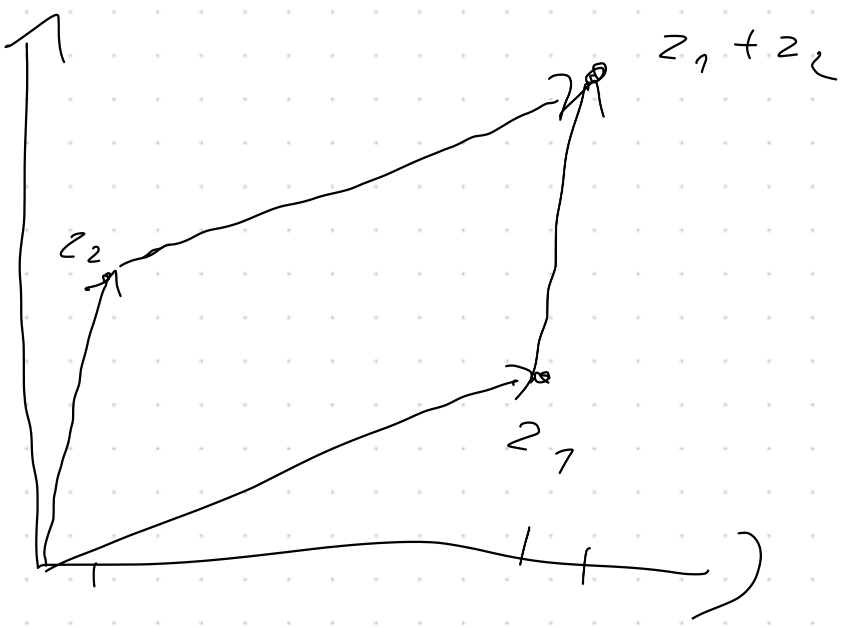
ist def. durch

$$|z| = \sqrt{z\bar{z}} = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{\mathrm{Re}(z)^2 + \mathrm{Im}(z)^2}$$

imaginäre Achse $i\mathbb{R}$ Komplexe Ebene



(17b)



Satz 152 Für $|\cdot| : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ gilt

a) $|z| \geq 0 \quad \forall z \in \mathbb{C}$ (positiv)

b) $|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$ (definit)

c) $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$ (multiplikativ)

d) $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$ (Δs-Ungl.)

Beweis Übung

Folgen in $\mathbb{C}$

Def 153 Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Folge in $\mathbb{C}$. Dann heißt (a_n)

a) **konvergent gegen** $a \in \mathbb{C}$ $\Leftrightarrow$

$\forall \varepsilon > 0 \; \exists N_0 \in \mathbb{N} : \; |a_n - a| < \varepsilon \;\; \forall n \geq N_0$

b) **Cauchy-Folge** $\Leftrightarrow$

$\forall \varepsilon > 0 \; \exists N_0 \in \mathbb{N} \; |a_n - a_m| < \varepsilon \;\; \forall n,m \geq N_0$.

Lemma 154 Sei (a_n) Folge in $\mathbb{C}$.

a) $\lim a_n = a \Leftrightarrow \begin{cases} \lim \operatorname{Re}(a_n) = \operatorname{Re}(a) \\ \lim \operatorname{Im}(a_n) = \operatorname{Im}(a) \end{cases}$

b) a_n CF $\Leftrightarrow \begin{cases} (\operatorname{Re}(a_n))_{n\in\mathbb{N}} \text{ ist CF und} \\ (\operatorname{Im}(a_n))_{n\in\mathbb{N}} \text{ ist CF.} \end{cases}$

Beweis (Forster §13 Satz 2 & 3).

177

Korollar 155 $\mathbb{C}$ ist vollständig, d.h. alle CF in $\mathbb{C}$ konvergieren in $\mathbb{C}$.

Beweis

$$\lim(a_n) = \underbrace{\lim \operatorname{Re}(a_n)}_{\in\mathbb{R}} + i \underbrace{\lim \operatorname{Im}(a_n)}_{\in\mathbb{R}}$$

Korollar 156 Seien (a_n), (b_n) konv. Folgen in $\mathbb{C}$, dann gilt

a) $\lim(a_n + b_n) = \lim a_n + \lim b_n$

b) $\lim(a_n \cdot b_n) = \lim a_n \cdot \lim b_n$

c) Falls $\lim b_n \neq 0$, dann ex. N_0 mit $b_n \neq 0$ $\forall n \geq N_0$ und

$$\lim \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim a_n}{\lim b_n}.$$