(178) Erinnerung: $\mathbb{C} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$

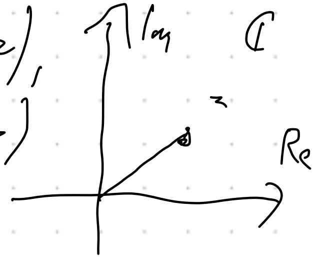
$z \in \mathbb{C} \Leftrightarrow x + iy, \; x, y \in \mathbb{R}$

$x = Re(z)$ $\quad \boxed{i^2 = -1}$

$y = Im(z)$

$\overline{z} = x - iy \quad |z| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{z \cdot \overline{z}}$

$$z_n \to z \Leftrightarrow \begin{cases} Re(z_n) \to Re(z), \\ Im(z_n) \to Im(z) \end{cases}$$



Def 157 Eine Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ von komplexen Zahlen $a_n \in \mathbb{C}$ heißt konvergent, wenn die Folge $(s_n) = \left(\sum_{k=0}^{n} a_k\right)$ konvergiert. Dann $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \lim_{n \to \infty} \sum_{k=0}^{n} a_k$.

Die Reihe heißt absolut konvergent, wenn $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$ konvergiert.

Majoranten-Kriterium (analog zu $\mathbb{R}$)

Sei $\sum a_n$ konvergent mit $a_n \in \mathbb{R}$, $a_n \geq 0 \; \forall n \in \mathbb{N}$ und $\sum c_n$ eine Reihe komplexer Zahlen $c_n \in \mathbb{C}$ mit $|c_n| \leq a_n \; \forall n \in \mathbb{N}$.

Dann konvergiert $\sum c_n$ absolut.

Quotienten-Kriterium

Sei $\sum c_n$ eine Reihe komplexer Zahlen $c_n \in \mathbb{C}$ mit $c_n \neq 0 \; \forall n \geq n_0$ und es gebe ein $\theta \in (0,1)$ mit

$$\left| \frac{c_{n+1}}{c_n} \right| \leq \theta \quad \forall n \geq n_0.$$

Dann konvergiert $\sum c_n$ absolut.

$\boxed{\text{Beweise wie in } \mathbb{R}}$

179

Satz 158 Die (komplexe) Exponentialreihe

$$e^z = \exp(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$$

konvergiert für jedes $z \in \mathbb{C}$ absolut.

Beweis: Sei $c_n = \frac{z^n}{n!} \in \mathbb{C}$. Dann gilt

$$a_n = |c_n| = \left|\frac{z^n}{n!}\right| = \frac{|\overbrace{z \cdot \ldots \cdot z}^{n\text{-mal}}|}{n!} = \frac{|z|^n}{n!}.$$

Die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} |c_n| = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|z|^n}{n!}$ ist eine Reihe in $\mathbb{R}$ und konvergiert absolut, denn (mit $x = |z| \in \mathbb{R}$)

$$\sum_{n=0}^{\infty} |c_n| = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|z|^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = \exp(x) = \exp(|z|).$$

Also konviert $\sum_{n=0}^{\infty} |c_n|$, d.h. $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ konvergiert absolut. ☒

Restglied

$$\exp(z) = \sum_{n=0}^{N} \frac{z^n}{n!} + R_{N+1}(z)$$

mit

$$|R_{N+1}(z)| \leq 2 \frac{|z|^{N+1}}{(N+1)!}$$

falls $|z| \leq 1 + \frac{1}{2} N$.

Funktionalgleichung

$$\exp(x+y) = \exp(x) \cdot \exp(y) \quad \forall x, y \in \mathbb{C}.$$

Folge $\exp(z) \neq 0 \quad \forall z \in \mathbb{C}$

$\boxed{\text{Beweise wie in } \mathbb{R}}$

180

Bemerkung: (*)

$$\lim_{n\to\infty} z_n = z \iff \lim_{n\to\infty} \overline{z}_n = \overline{z}$$

Proposition 159 $\exp(\overline{z}) = \overline{\exp(z)}\ \forall z \in \mathbb{C}$.

Beweis

$$\exp(\overline{z}) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{\overline{z}^k}{k!} = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{\overline{(z^k)}}{\overline{k!}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \overline{\sum_{k=0}^{n} \frac{z^k}{k!}} \overset{(*)}{=} \overline{\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{z^k}{k!}} = \overline{\exp(z)}.$$

□

Def 160 Sei $D \subseteq \mathbb{C}$ und $f: D \to \mathbb{C}$.

Dann heißt f stetig in $x \in \mathbb{C}$, wenn gilt

$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0: |x-y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$.

f heißt stetig, wenn f stetig in jedem $x \in D$ ist.

Satz 161 Sei $D \subseteq \mathbb{C}$, $f: D \to \mathbb{C}$. Dann gilt

f stetig in $x \iff \begin{cases} \forall x_n \in D \text{ mit } x_n \to x \\ \text{gilt } f(x_n) \to f(x) \end{cases}$

$$\iff \lim_{\substack{y\to x \\ y \in D}} f(y) = f(x)$$

Beweis: Analog zu $\mathbb{R}$.

Satz 162 $\exp: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ist stetig.

Beweis Verwende Restgliedabschätzung wörtlich wie in $\mathbb{R}$, Satz 91, VL 14. □

(181) Trigonometrische Funktionen

(Forster § 14)

Beobachtung Für $z \in \mathbb{R}$ gilt

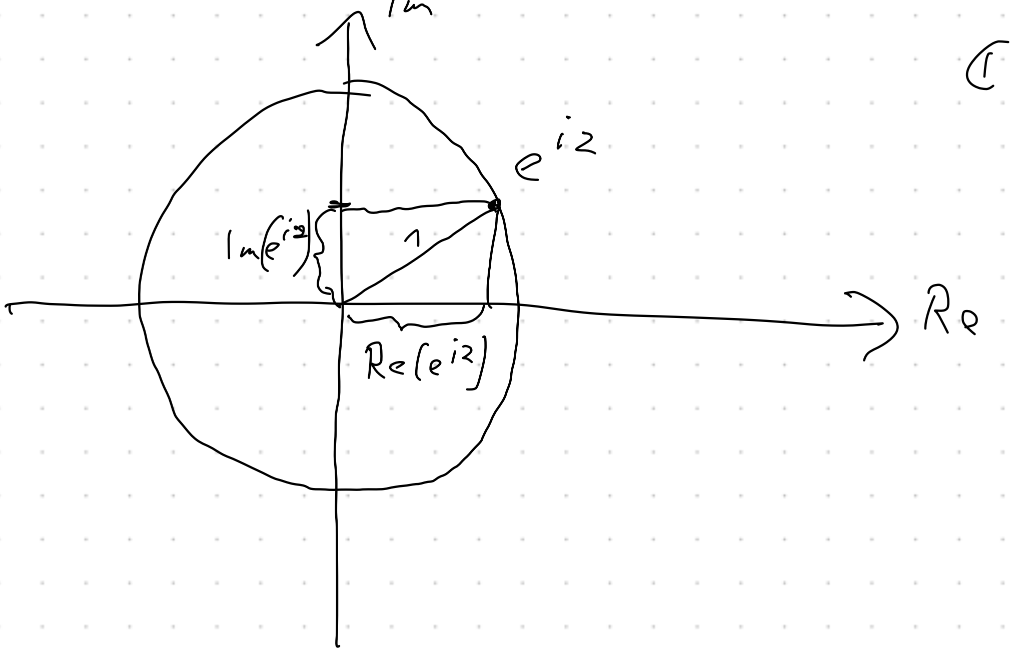
$$|\exp(iz)| = \sqrt{\exp(iz)\,\overline{\exp(iz)}} = 1,$$

denn

$$\exp(iz)\cdot\overline{\exp(iz)} = \exp(iz)\cdot\exp(\overline{iz})$$

$$= \exp(iz)\cdot\exp(-iz)$$

$$= \exp(iz - iz) = \exp(0) = 1.$$



Def 163 Für $x \in \mathbb{R}$ definiere

$$\cos(x) := \mathrm{Re}(e^{ix}) = \mathrm{Re}(\exp(ix))$$

$$\sin(x) := \mathrm{Im}(e^{ix}) = \mathrm{Im}(\exp(ix)).$$

Bem Es gilt (*)

$$|\cos(x)| = |\mathrm{Re}(e^{ix})| \leq |e^{ix}| = 1$$

$$|\sin(x)| = |\mathrm{Im}(e^{ix})| \leq |e^{ix}| = 1$$

Also: $\cos : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\cos(\mathbb{R}) \in [-1,1]$

$\sin : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\sin(\mathbb{R}) \in [-1,1]$.

(*) Denn für $z = x + iy$, $x, y \in \mathbb{R}$ gilt

$$|z|^2 = x^2 + y^2 \geq x^2 = |x|^2$$

$$\text{— " —} \geq y^2 = |y|^2$$

$\Rightarrow |z| \geq |x|$ und $|z| \geq |y|$

(182) Eulersche Formel

$$e^{ix} = \underbrace{\cos(x)}_{Re(e^{ix})} + i\cdot \underbrace{\sin(x)}_{Im(e^{ix})} \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

Satz 164 $\cos: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und $\sin: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sind stetig.

Beweis Sei $x \in \mathbb{R}$, $x_n \in \mathbb{R}$ mit $x_n \to x$.
Dann gilt $ix_n \to ix$ und

$$\cos(x_n) = Re(e^{ix_n}) \xrightarrow[\text{exp stetig}]{} \boxed{Re(e^{ix}) = \cos(x).}$$

(sin analog.) $\square$

Satz 165 (Additionstheoreme) Für $x, y \in \mathbb{R}$ gilt

$$\cos(x+y) = \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y)$$

$$\sin(x+y) = \sin(x)\cos(y) + \cos(x)\sin(y)$$

und insbesondere

$$\cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x)$$

$$\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x)$$

Beweis: $e^{i(x+y)} = e^{ix+iy} = e^{ix}\cdot e^{iy}$

$$\cos(x+y) + i\cdot\sin(x+y) = e^{i(x+y)} = e^{ix}\cdot e^{iy}$$

$$= (\cos(x) + i\sin(x))\cdot(\cos(y) + i\sin(y))$$

$$= \cos(x)\cos(y) + i^2\sin(x)\sin(y)$$
$$+ i\cos(x)\sin(y) + i\sin(x)\cos(y)$$

$$= (\cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y))$$
$$+ i\,(\cos(x)\sin(y) + \sin(x)\cos(y))$$

Re + i Im $\square$

(183) **Satz 166** Für $x, y \in \mathbb{R}$ gilt

a) $\cos(x) = \frac{1}{2}\left(e^{ix} + e^{-ix}\right)$

$\sin(x) = \frac{1}{2i}\left(e^{ix} - e^{-ix}\right)$

b) $\cos(-x) = \cos(x)$, $\sin(-x) = -\sin(x)$

c) $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$

d) $\cos(x) - \cos(y) = -2\sin\left(\frac{x+y}{2}\right)\sin\left(\frac{x-y}{2}\right)$

e) $\sin(x) - \sin(y) = 2\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\sin\left(\frac{x-y}{2}\right)$

Beweis Übung.

Satz 167 Für $x \in \mathbb{R}$ gilt

$$\cos(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} \dots$$

$$\sin(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots$$

Beide Reihen konv. absolut.

Beweis (Skizze)

$$i^0 = 1 = i^4 = \dots = i^{4k}$$
$$i^1 = i = i^5 = \dots = i^{4k+1}$$
$$i^2 = -1 = i^6 = \dots = i^{4k+2}$$
$$i^3 = -i = i^7 = \dots = i^{4k+3}$$

$$e^{ix} = i^0 \frac{x^0}{0!} + i^1 \frac{x^1}{1!} + i^2 \frac{x^2}{2!} + i^3 \frac{x^3}{3!} + \dots$$

$$= 1\frac{x^0}{0!} + i\frac{x^1}{1!} - 1\frac{x^2}{2!} - i\frac{x^3}{3!} + \dots$$

$\mathrm{Re}(e^{ix}) = \cos(x)$

$\mathrm{Im}(e^{ix}) = \sin(x)$