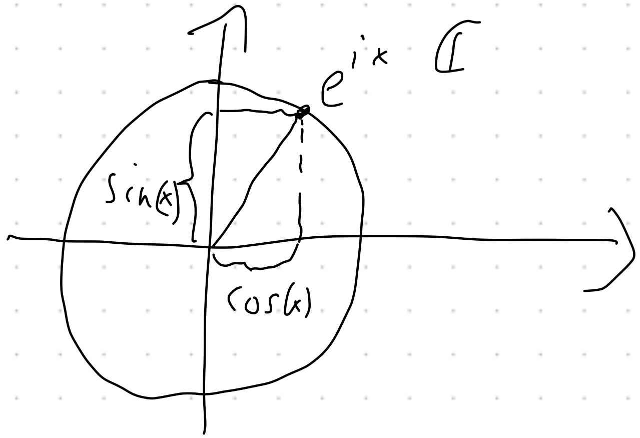
(184) Erinnerung

$\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$

$\sin : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad \sin(x) = \operatorname{Im} \exp(ix)$

$\cos : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad \cos(x) = \operatorname{Re} \exp(ix)$



$\cos(x+y) = \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y)$

$\sin(x+y) = \sin(x)\cos(y) + \cos(x)\sin(y)$

Restgliedabschäfzung

$\longrightarrow$ siehe Forster §14, Satz 5

Korollar 168

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x \neq 0}} \frac{\sin(x)}{x} = 1$$

Beweis: Verwende Restgliedabschätzung.

Satz 169 cos hat im Intervall $[0,2]$ genau eine Nullstelle.

Beweis: (siehe Forster §14, Satz 6)

Def 170 Die Nullstelle von cos in $[0,2]$ nennen wir $\frac{\pi}{2}$.

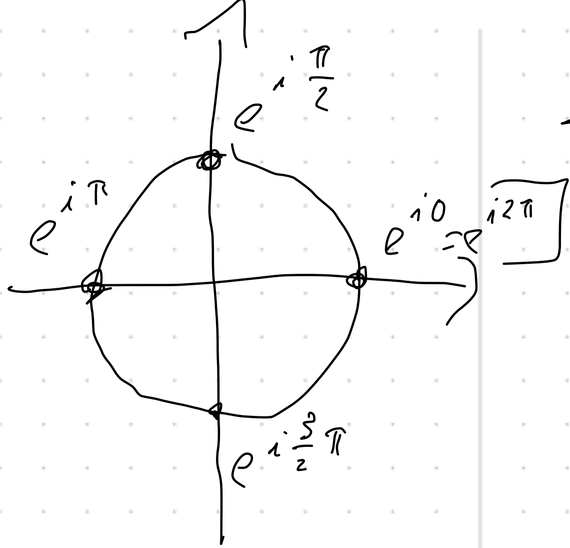
(185) **Satz 171**

a) $e^{i\frac{\pi}{2}} = i$

b) $e^{i\pi} = -1$

c) $e^{i\frac{3}{2}\pi} = -i$

d) $e^{2\pi i} = 1$



x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3}{2}\pi$	2π
$\cos(x)$	1	0	-1	0	1
$\sin(x)$	0	1	0	-1	0

Beweis $\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$

$\Rightarrow \sin^2\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 - \cos^2\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$

$\boxed{\sin\frac{\pi}{2} > 0}$ (ohne Beweis → Forster)

$\sin\frac{\pi}{2} = 1 \Rightarrow e^{i\frac{\pi}{2}} = i$

$e^{i\frac{n\pi}{2}} = \left(e^{i\frac{\pi}{2}}\right)^n = i^n$. $\square$

Korollar 172 Für $x \in \mathbb{R}$ gilt

a) $\cos(x + 2\pi) = \cos(x)$, $\sin(x+2\pi) = \sin(x)$

b) $\cos(x+\pi) = -\cos(x)$, $\sin(x+\pi) = -\sin(x)$

c) $\cos(x) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$, $\sin(x) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$

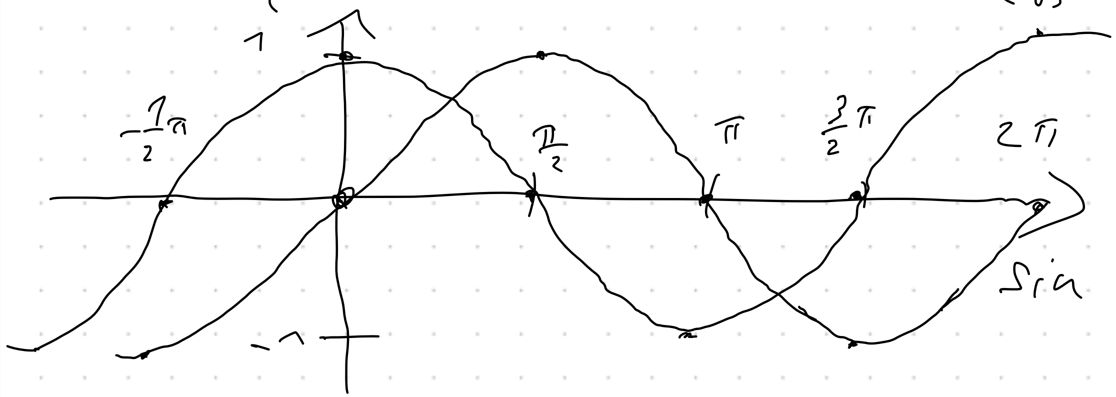
d) $\{x \in \mathbb{R} \mid \sin(x) = 0\} = \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$

e) $\{x \in \mathbb{R} \mid \cos(x) = 0\} = \{k\pi + \frac{\pi}{2} \mid k \in \mathbb{Z}\}$

Beweis Übung

a) $e^{i(x+2\pi)} = e^{ix} \cdot e^{i2\pi} = e^{ix}$

$\Rightarrow \begin{cases} \cos(x+2\pi) = \cos(x) \\ \sin(x+2\pi) = \sin(x) \end{cases}$



(186) **Bemerkung** Es gilt

$$-1 = \cos(\pi) = \mathrm{Re}(e^{i\pi})$$
$$0 = \sin(\pi) = \mathrm{Im}(e^{i\pi})$$

$$e^{i\pi} = -1$$

$$\Rightarrow \boxed{e^{i\pi} + 1 = 0}$$ Eulersche Identität

Korollar 173

Für $x \in \mathbb{R}$ gilt $e^{ix} = 1 \Leftrightarrow x = 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.

Beweis

$$e^{ix} = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} \sin(x) = 0 \\ \cos(x) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow x = 2\pi k, \ k \in \mathbb{Z}.$$ $\square$

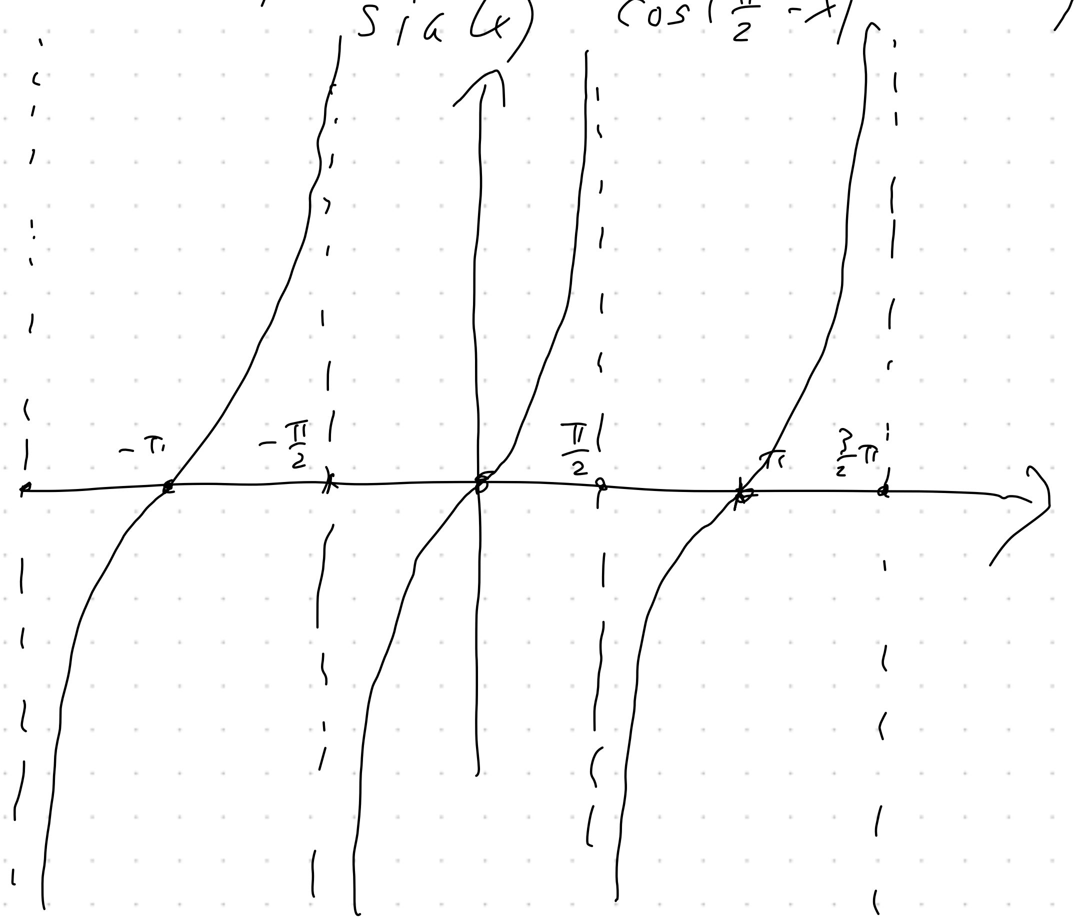
Def 174

a) Sei $x \in \mathbb{R} \setminus \{ \frac{\pi}{2} + \pi k \mid k \in \mathbb{Z} \}$, dann

$$\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$$

b) Sei $x \in \mathbb{R} \setminus \{ \pi k \mid k \in \mathbb{Z} \}$, dann

$$\cot(x) = \frac{\cos(x)}{\sin(x)} = \frac{\sin(\frac{\pi}{2} - x)}{\cos(\frac{\pi}{2} - x)} = \tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$$



(187) Satz 175

a) $\cos : [0, \pi] \to [-1, 1]$ ist streng monoton fallend und bijektiv.

Arcus-Cosinus:

$$\arccos := \cos^{-1} : [-1, 1] \to [0, \pi]$$

b) $\sin : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \to [-1, 1]$ ist streng monoton wachsend und bijektiv.

Arcus-Sinus:

$$\arcsin := \sin^{-1} : [-1, 1] \to [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$$

c) $\tan : (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \to \mathbb{R}$ ist streng monoton wachsend und bijektiv.

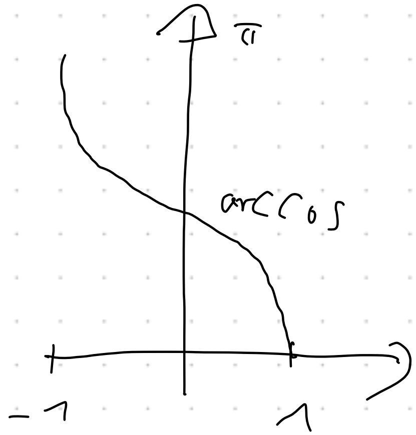
Arcus-Tangens

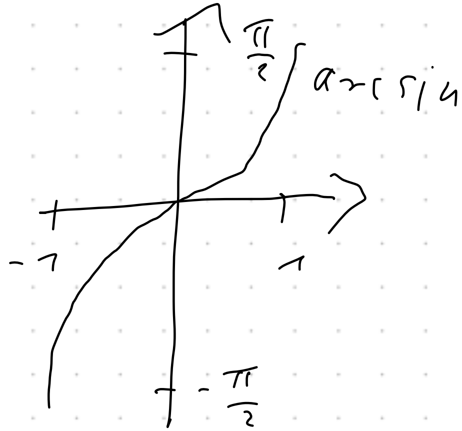
$$\arctan : \mathbb{R} \to (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$$

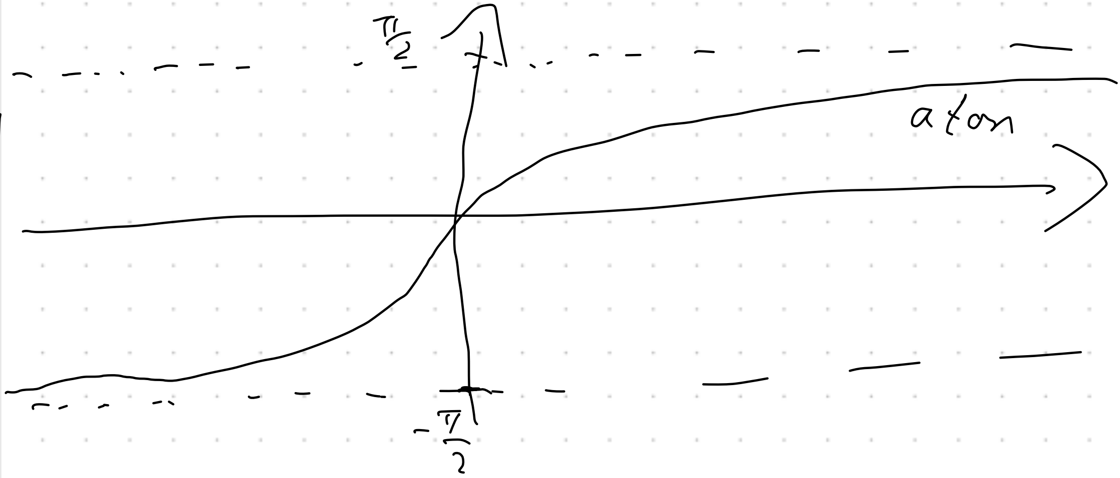
Beweis Forster §14, Satz 8

Alternative Notation

arccos = acos, arcsin = asin, arctan = atan







188 **Satz 176** $\sin: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist diff.bar und $\sin'(x) = \cos(x)$.

Beweis: Nach Satz 166e) gilt

$$\sin(x) - \sin(y) = 2\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\sin\left(\frac{x-y}{2}\right)$$

Also

$$\frac{\sin(x+h) - \sin(x)}{h} = \frac{2\cos\left(x+\frac{h}{2}\right)\sin\left(\frac{h}{2}\right)}{h}$$

$$= \underbrace{\cos\left(x+\frac{h}{2}\right)}_{\xrightarrow[h\to 0]{} \cos(x),\ \text{da cos stetig}} \cdot \underbrace{\frac{\sin\left(\frac{h}{2}\right)}{\frac{h}{2}}}_{\xrightarrow[h\to 0]{} 1,\ \text{wg. Korollar 168}} \xrightarrow[h\to 0]{} \cos(x).$$

$\blacksquare$

Satz 177 $\cos: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist diff.bar mit $\cos'(x) = -\sin(x)$.

Beweis

$$\cos(x) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$$

$$\Rightarrow \cos'(x) = \sin'\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\cdot(-1)$$

$$= \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\cdot(-1)$$

$$= -\sin(x)$$

$\blacksquare$

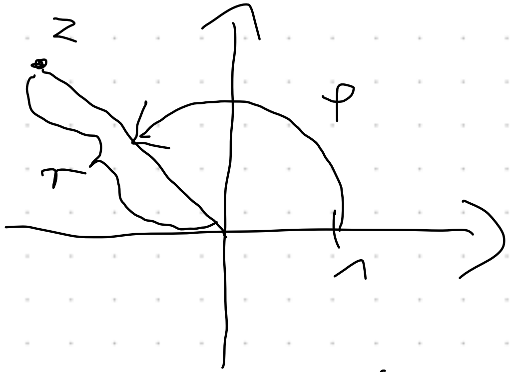
(189) Polarkoordinaten

Satz 178 Jedes $z \in \mathbb{C}$ läßt sich als

$$z = r \cdot e^{i\varphi}$$

mit $\varphi \in \mathbb{R}$ und $r = |z| \in \mathbb{R}_0^+$ schreiben. Für $z \neq 0$ ist φ bis auf ganzzahlige Vielfache von 2π eindeutig bzw. φ eindeutig in $[0, 2\pi)$

Bem



(r, φ) mit $r \in \mathbb{R}_0^+$ und $\varphi \in [0, 2\pi)$ heißt **Polarkoordinaten** von z.
φ **Winkel in Bogenmaß.**

Beweis Falls $z = 0$, dann $z = \underbrace{0}_{r\,=\,|z|} \cdot e^{i\varphi}$ für jedes $\varphi \in \mathbb{R}$.

Sei $z \neq 0$. Dann gilt $r = |z| > 0$.

Setze $\hat{z} = \frac{z}{|z|} = \frac{z}{r}$. Dann gilt

$$|\hat{z}| = \left|\frac{z}{|z|}\right| = \frac{1}{|z|} \cdot |z| = 1$$

und

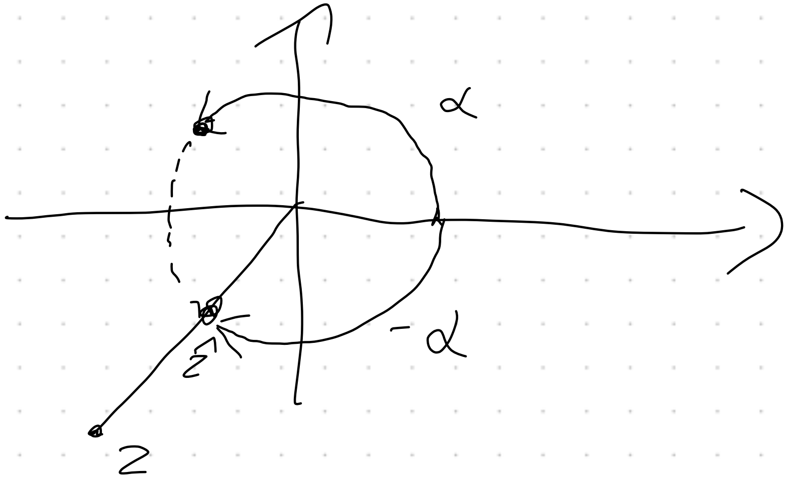
$$z = r \cdot \hat{z}.$$

Ziel: schreibe $\hat{z} = e^{i\varphi}$ mit $\varphi \in \mathbb{R}$.

Wegen $1 = |\hat{z}|^2 = \mathrm{Re}(\hat{z})^2 + \mathrm{Im}(\hat{z})^2$

gilt $\mathrm{Re}(\hat{z}), \mathrm{Im}(\hat{z}) \in [-1, 1]$

(190)



setze $\alpha = \arccos(Re(\hat{z})) \in [0,\pi]$

Dann gilt

$$\cos(\alpha) = Re(\hat{z})$$

$$\sin(\alpha) = \sqrt{1 - Re(z)^2} = \pm Im(\hat{z})$$

$$\text{Setze } \varphi = \begin{cases} \alpha & \text{falls } Im(\hat{z}) \geq 0 \\ -\alpha & \text{falls } Im(\hat{z}) < 0 \end{cases}$$

Dann gilt

$$e^{i\varphi} = \cos(\varphi) + i\sin(\varphi)$$
$$= \cos(\alpha) + i\sin(\varphi)$$
$$= Re(\hat{z}) + i\, Im(\hat{z}) = \hat{z}$$

$$\Rightarrow z = r \cdot \hat{z} = r \cdot e^{i\varphi}.$$

<u>Ang</u> $\hat{z} = e^{i\varphi_1} = e^{i\varphi_2}$

Dann $1 = e^{i\varphi_1} \cdot e^{-i\varphi_2} = e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)}$

<u>Korollar 173</u> $\Rightarrow \varphi_1 - \varphi_2 = 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$,

$$\varphi_1 = \varphi_2 + 2\pi k. \quad \boxtimes$$