

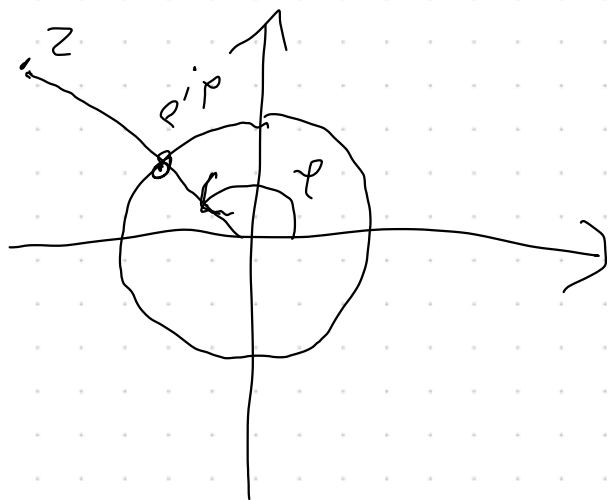
191 Erinnerung

$$z \in \mathbb{C} \quad z = x + iy, \quad x, y \in \mathbb{R}$$

$$z = r e^{i\varphi}$$

$$\text{mit } r = |z| \in \mathbb{R}_0^+, \quad \varphi \in [0, 2\pi)$$

falls $z \neq 0$, dann r, φ eindeutig

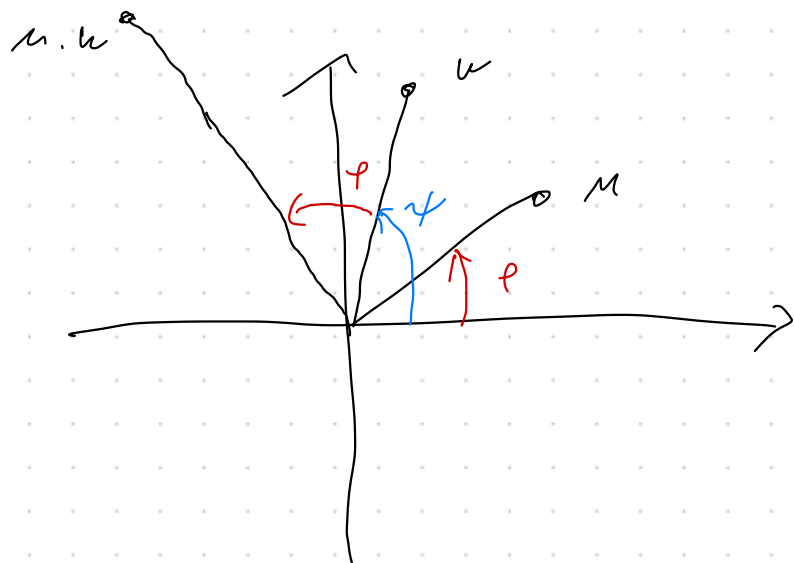


Multiplikation mit Polar koordinaten

Bem Sei $u = |u| e^{i\varphi}$, $w = |w| e^{i\psi}$

$$\text{dann } u \cdot w = |u||w| e^{i(\varphi+\psi)}$$

(Beträge multiplizieren
Winkel addieren)



Korollar 179 Sei $z \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, dann gilt

$$u^n = 1 \Leftrightarrow u = e^{i \frac{2\pi k}{n}} \quad \text{mit } k \in \mathbb{Z}.$$

(bzw. $k = 0, \dots, n-1$)

Beweis " $\Rightarrow$ " Sei $u^n = 1$, dann $|u| = 1$,

$$\text{also } u = e^{i\varphi} \text{ und}$$

$$1 = u^n = e^{i\varphi n}, \quad \text{also gilt } \varphi n = 2\pi k$$

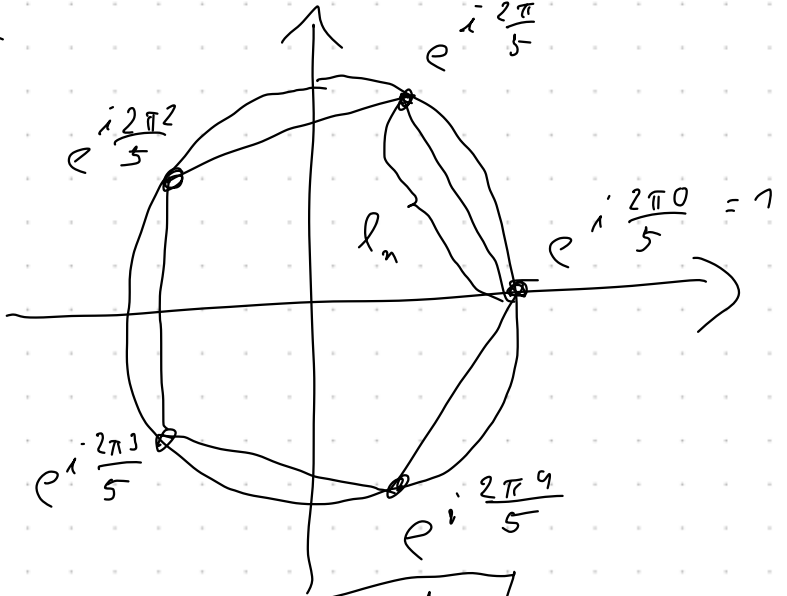
$$\Rightarrow \varphi = \frac{2\pi k}{n}$$

$$\Leftarrow \left(e^{i \frac{2\pi k}{n}} \right)^n = e^{i \frac{2\pi k n}{n}} = e^{i 2\pi k} = 1 \quad \square$$

192

$n=5$

Wenn $n^n = 1$, dann $n = \sqrt[n]{1}$.



Die Zahlen $\boxed{e^{i \cdot \frac{2\pi k}{n}}}$ mit $k=0, \dots, n-1$

heißen n -ten Einheitswurzeln

$$l_n = \left| e^{i \cdot \frac{2\pi k}{n}} - e^{i \cdot \frac{2\pi (k-1)}{n}} \right|$$

$$= 2 \sin\left(\frac{\pi}{n}\right) \quad (\text{Übung})$$

Umfang des n -Ecks: $l_n = n l_n = 2n \sin\left(\frac{\pi}{n}\right)$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} l_n = \lim_{n \rightarrow \infty} 2n \sin\left(\frac{\pi}{n}\right)$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} 2\pi \frac{\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)}{\frac{\pi}{n}}$$

$$= 2\pi \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = 2\pi$$

Umfang von n -Eck

Umfang von Einheitskr.

193

Konvergenz von Funktionenfolgen

Def 180 Sei D eine Menge, $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge von Funktionen

$$f_n: D \rightarrow \mathbb{C} \text{ und } f: D \rightarrow \mathbb{C} \text{ Dann läßt } (f_n)$$

a) punktweise konvergent gegen f , wenn für alle $x \in D$ gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x), \text{ d.h.}$$

$$\forall x \in D \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N}: |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \quad \forall n \geq n_0.$$

b) gleichmäßig konvergent gegen f , wenn gilt

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N}: \quad \forall x \in D \quad |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \quad \forall n \geq n_0$$

Bemerkung Es gilt $(f_n \xrightarrow{\text{glm}} f) \implies (f_n \xrightarrow{\text{pu}} f)$

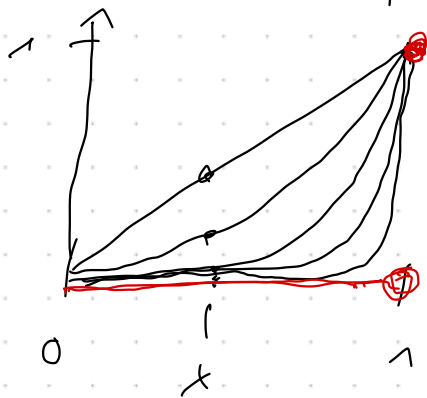
Notation:

$$f_n \xrightarrow{\text{pu}} f$$

$$f_n \xrightarrow{\text{glm}} f$$

Lemma 181 Punktweise und glm. Grenzwerte sind eindeutig (falls existent). Beweis: Übung

194

Beispiel (a)Sei $D = [0, 1]$, $f_n(x) = x^n$.Für $x \in [0, 1)$ gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} x^n = 0$$

Für $x = 1$ gilt

$$f_n(x) = f_n(1) = 1^n = 1,$$

$$\text{d.h. } \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x \in [0, 1) \\ 1 & \text{für } x = 1 \end{cases}$$

Also $f_n \xrightarrow{pw} f$.Ausg $f_n \xrightarrow{glm} f$. Dann u ex. zu

$$\varepsilon = \frac{1}{4} > 0 \text{ ein } n_0 \in \mathbb{N} \text{ mit}$$

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \quad \forall n \geq n_0 \quad \forall x \in [0, 1]$$

$$\text{Setze } x_0 = 2^{-\frac{1}{n_0}} = \frac{1}{2^{\frac{1}{n_0}}} = \sqrt[n_0]{\frac{1}{2}}$$

Dann gilt $x_0 \in [0, 1]$

$$|f_{n_0}(x_0) - f(x_0)| = |x_0^{n_0} - 0| = x_0^{n_0}$$

$$= \frac{1}{2} > \frac{1}{4} = \varepsilon \quad \text{!}$$

Also $f_n \xrightarrow{pw} f$

$$\bullet f_n \not\xrightarrow{glm} f$$

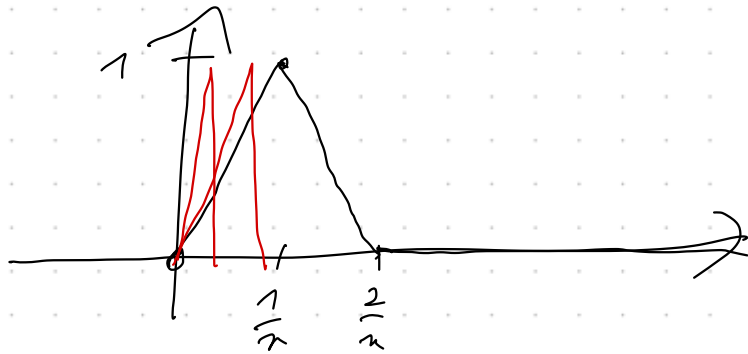
• f_n stetig• f unstetig

(195) Beispiel (b)

Sei $f_n(x) = \max(0, 1 - |nx - 1|)$

Dann ist f_n stetig

$$f_n(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } x = \frac{1}{n} \\ 0 & \text{für } x = 0 \\ 0 & \text{für } x = \frac{2}{n} \\ \dots & \text{sonst} \end{cases}$$



Sei $x \in (0, 1]$ bel. dann ex.

$n_0 \in \mathbb{N}$ mit $\frac{2}{x} \leq n_0$, also $\frac{2}{n_0} \leq x$.

und $\frac{2}{n} \leq \frac{2}{n_0} \leq x$ für $n \geq n_0$

d.h. $f_n(x) = 0$ für $n \geq n_0$

Also $f_n(x) \rightarrow 0$,

d.h. $f_n \xrightarrow{pu} f \equiv 0$

Für jedes x gilt

$$\left| f_n\left(\frac{1}{n}\right) - f\left(\frac{1}{n}\right) \right| = |1 - 0| = 1.$$

Also: $f_n \not\xrightarrow{glu} f$,

$f_n \xrightarrow{pu} f$

f_n stetig

f stetig

(196) Def 182 Sei D eine Menge

und $f: D \rightarrow \mathbb{C}$. Dann def. die

Supremumsnorm

$$\|f\|_{\infty} = \|f\|_{\infty, D} = \sup \{ |f(x)| \mid x \in D \} \in \mathbb{R}_{\geq 0} \cup \{\infty\}.$$

Ben Es gilt

$$\|f_n - f\|_{\infty} < \varepsilon \Leftrightarrow \sup \{ |f_n(x) - f(x)| \mid x \in D \} < \varepsilon$$

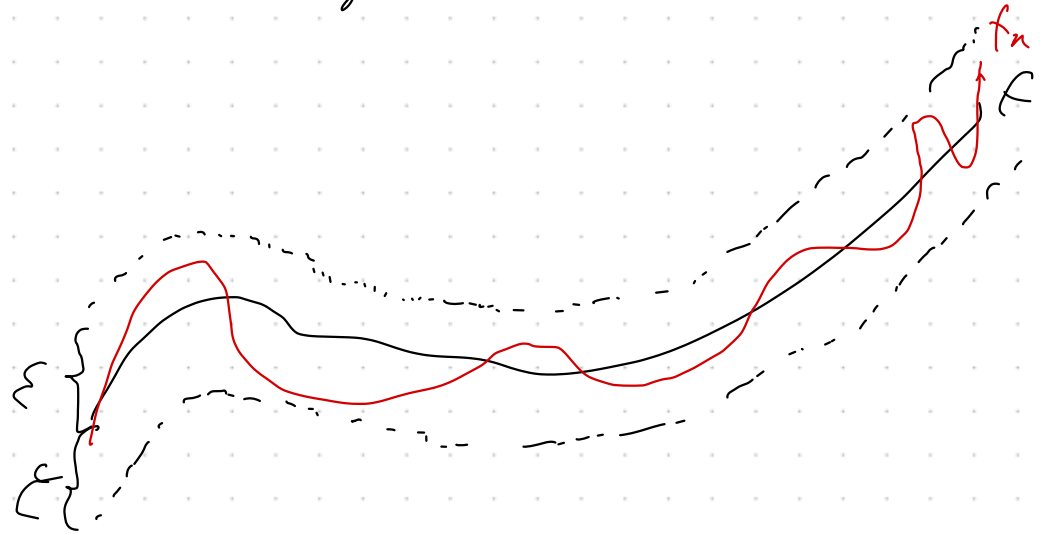
$$\Leftrightarrow |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \quad \forall x \in D$$

$$f_n \xrightarrow{\text{gl.}} f \Leftrightarrow \underbrace{\forall \varepsilon > 0 \exists n \in \mathbb{N} : \|f_n - f\|_{\infty} < \varepsilon \quad \forall n \geq n_0}$$

$$\Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n - f\|_{\infty} = 0$$

Anschaulich $\|f_n - f\| < \varepsilon$

$\Rightarrow f_n$ liegt in ε -Schlauch um f



197

Satz 183 Sei $D \subseteq \mathbb{C}$, $f_n : D \rightarrow \mathbb{C}$
stetig $\forall n \in \mathbb{N}$. Falls $f_n \xrightarrow{\text{glm.}} f$
mit $f : D \rightarrow \mathbb{C}$, dann ist f stetig
(Glm. Grenzwerte von Folgen stetiger
Funktionen sind stetig.)

Beweis Sei $x \in D$ und $\varepsilon > 0$.

Z.z. $\exists \delta > 0 : (x-y) < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$.

Es ex. $n_0 \in \mathbb{N}$ mit

$$(1) \quad |f_n(y) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{3} \quad \forall n \geq n_0 \quad \forall y \in D.$$

(da $f_n \xrightarrow{\text{glm.}} f$)

Da f_{n_0} stetig ex. $\delta > 0$ mit

$$(2) \quad |f_{n_0}(x) - f_{n_0}(y)| < \frac{\varepsilon}{3} \quad \forall y \in D, |x-y| < \delta.$$

Somit gilt für $|y-x| < \delta$

$$\begin{aligned} |f(x) - f(y)| &= |f(x) - f_{n_0}(x) + f_{n_0}(x) - f_{n_0}(y) + f_{n_0}(y) - f(y)| \\ &\leq \underbrace{|f(x) - f_{n_0}(x)|}_{(1) < \frac{\varepsilon}{3}} + \underbrace{|f_{n_0}(x) - f_{n_0}(y)|}_{(2) < \frac{\varepsilon}{3}} + \underbrace{|f_{n_0}(y) - f(y)|}_{(1) < \frac{\varepsilon}{3}} \end{aligned}$$

$$< \varepsilon.$$

□