

198 Erinnerung $f_n, f: D \rightarrow \mathbb{C}$

$$f_n \xrightarrow{p_n} f \Leftrightarrow (\forall x \in D: f_n(x) \rightarrow f(x))$$

$$f_n \xrightarrow{g/n} f \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n - f\|_\infty = 0$$

Reihe von Funktionen:

$$f_n: D \rightarrow \mathbb{C}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_n$$

$$\sum_{k=0}^n f_k \xrightarrow{?} (\dots)$$

Satz 184 (Konvergenzkriterium von Weierstraß)

Sei $f_n: D \rightarrow \mathbb{C}$ $\forall n \in \mathbb{N}$ und es gelte

$$\sum_{n=0}^{\infty} \|f_n\|_\infty < \infty.$$

Dann konvergiert die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$
absolut und gleichmäßig gegen ein
 $f: D \rightarrow \mathbb{C}$, d.h. für

$$s_n = \sum_{k=0}^n f_k$$

$$\text{gilt } s_n \xrightarrow{g/n} f$$

und $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ konv. absolut $\forall x \in D$.

Beweis (Forster §21, Satz 2)

(199)

Def 185 Sei $x_0 \in \mathbb{C}$ und $a_n \in \mathbb{C} \forall n \in \mathbb{N}$.

Dann heißt die Reihe

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$$

Potenzreihe mit Entwicklungspunkt x_0 .

Satz 186 Ang. die Potenzreihe

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$$

mit $x_0 \in \mathbb{C}$, $a_n \in \mathbb{C} \forall n \in \mathbb{N}$, konvergiert für ein $z \in \mathbb{C}$, $z \neq x_0$.

Sei $0 < r < |z-x_0|$ und

$$D = \overline{B_r(x_0)} = \{x \in \mathbb{C} \mid |x-x_0| \leq r\}.$$

a) Dann konv. die Reihe auf D absolut und glm.

b) Auch $g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (x-x_0)^{n-1}$ konv. abs. und glm. auf D .

Beweis a) Sei $f_n(x) = a_n (x-x_0)^n$, d.h.

$f = \sum_{n=0}^{\infty} f_n$. Da $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(z)$ konvergiert,

ex. ein $M > 0$ mit $|f_n(z)| \leq M \forall n \in \mathbb{N}$.

Für $x \in D$ gilt dann

$$|f_n(x)| = |a_n (x-x_0)^n| = |a_n (z-x_0)^n| \cdot \left| \frac{x-x_0}{z-x_0} \right|^n$$

$$= |f_n(z)| \cdot \left| \frac{x-x_0}{z-x_0} \right|^n \leq M \theta^n$$

$$\text{mit } \theta = \frac{r}{|z-x_0|} < \frac{|z-x_0|}{|z-x_0|} = 1$$

d.h. $\theta \in [0, 1)$.

Also gilt $\|f\|_{\infty, D} \leq M \theta^n$.

Da die geom. Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} M \theta^n = M \frac{1}{1-\theta}$

konvergiert, konvergiert auch

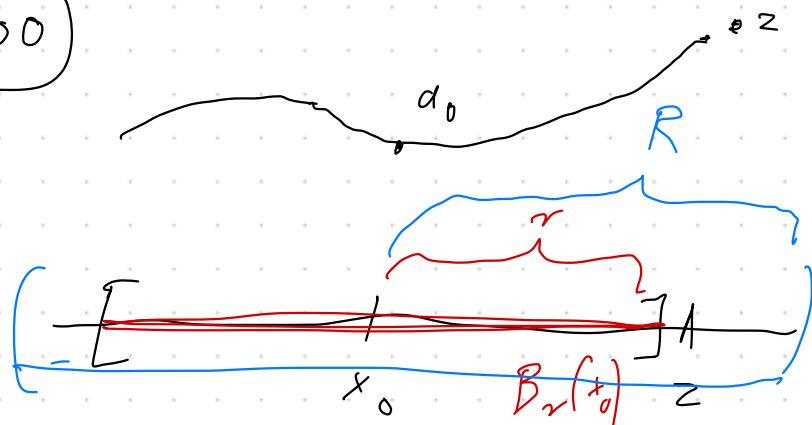
$$\sum_{n=0}^{\infty} \|f_n\|_{\infty, D} < \infty$$

konvergieren (Majorantenkriterium).

Nach Satz 184 konvergiert f abs. und glm. i.D.

□

(6) (Forscherfrage)
(5.4.2)



Def 187 Sei $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - x_0)^n$
 eine Potenzreihe, dann heißt

$$R := \sup \left\{ |z - x_0| \mid \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - x_0)^n \text{ konv.} \right\}$$

Konvergenzradius der Potenzreihe.

Bem Für $r < R$ ex. z mit $r < |z - x_0| < R$
 s. daß die Reihe für z konvergiert,
 also konv. die Reihe in $\overline{B_r(x_0)}$ abs. und glm.
 Außerdem konvergiert die Reihe für
 alle $x \in B_R(x_0)$ absolut.

Vorsatz f. A. konv. die Reihe in $B_R(x_0)$ nicht glm.

Bem Für x mit $|x - x_0| > R$
 konv. die Reihe nicht

Bem Die Potenzreihe ist in $B_R(x_0)$

stetig: Sei $x \in B_R(x_0)$, dann
 ex. $r < R$ mit $x \in \overline{B_r(x_0)}$.

In $\overline{B_r(x_0)}$ ist f der glm Grenzwert
 der Folge $\sum_{k=0}^n a_k (x - x_0)^k$

von Polynomen (stetige Funktionen!).
 Also ist f in $\overline{B_r(x_0)}$ nach Satz 183
 stetig.

207 Korollar 18.8 Seien

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n \text{ und}$$

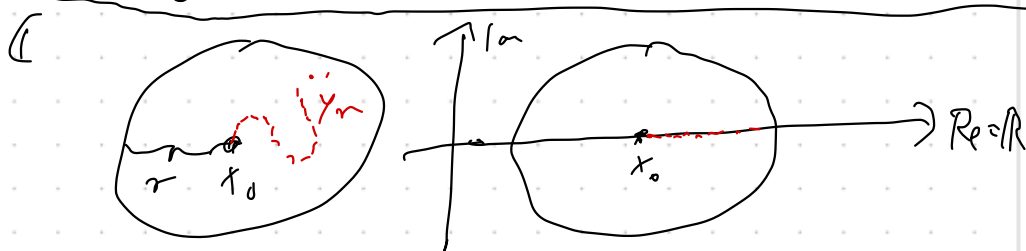
$$g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (x-x_0)^n$$

Potenzreihen mit $a_n, b_n \in \mathbb{C} \quad \forall n \in \mathbb{N}$,
die beide (mindestens) in $B_r(x_0)$
 $r > 0$ konvergieren.

Es gebe eine Folge $y_n \in B_r(x_0) \setminus \{x_0\}$
mit $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = x_0$

$$\text{und } f(y_n) = g(y_n) \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Dann gilt $a_n = b_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$, d.h. $f = g$.



Beweis Betrachte

$$h(x) = f(x) - g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{(a_n - b_n)}_{c_n} (x-x_0)^n$$

Dann gilt $h(y_n) = f(y_n) - g(y_n) = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

z.z. $c_n = 0 \quad \forall n$. Ang. Es gilt $c_n = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

Dann sei $m \geq 0$ der kleinste Index mit $c_m \neq 0$ (*)

Betrachte nun

$$H(x) = \frac{h(x)}{(x-x_0)^m} = \sum_{k=0}^{\infty} c_{m+k} (x-x_0)^k$$

Dann konvergiert H in $B_r(x_0)$
und ist dort stetig. Also

$$0 = H(y_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} H(x_0) = 0.$$

Aber $H(x_0) = c_m$.

Also $c_m = 0$. $\hookrightarrow$ zu (*)



(202) Bsp Die Reihendarstellungen von $\exp, \cos, \sin$ sind Potenzreihen zum Entwicklungspunkt $x_0 = 0$:

$$\exp(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k$$

mit $a_k = \frac{1}{k!}$ und $x_0 = 0$.

Wegen $\exp'(0) = \exp(0) = 1$

gilt $a_k = \frac{1}{k!} = \frac{\exp^{(k)}(0)}{k!}$,

dann gilt $\boxed{\exp(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\exp^{(k)}(0)}{k!} (x - x_0)^k}$

$$\cos(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k$$

mit $x_0 = 0$ und

$$a_k = \begin{cases} 0 & \text{falls } k \text{ ungerade} \\ \frac{1}{k!} & \text{falls } k = 4k \\ -\frac{1}{k!} & \text{falls } k = 4k + 2 \end{cases}$$

d.h. wegen

$$1 = \cos(0) = \cos^{(0)}(0) = \cos^{(4)}(0) = \dots$$

$$0 = -\sin(0) = \cos^{(1)}(0) = \cos^{(5)}(0) = \dots$$

$$-1 = -\cos(0) = \cos^{(2)}(0) = \cos^{(6)}(0) = \dots$$

$$0 = \sin(0) = \cos^{(3)}(0) = \cos^{(7)}(0) = \dots$$

$$a_k = \frac{\cos^{(k)}(x_0)}{k!}$$

(Analog für $\sin$).

D.h. für $f = \exp / \cos / \sin$ gilt

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n$$

mit $x_0 = 0$.

203

Die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x-x_0)^n$

heißt Taylor-Reihe von f an der Stelle x_0 .

Satz 1.29 Sei $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$

eine Potenzreihe mit $x_0, a_n \in \mathbb{R}$
und Konvergenzradius $r > 0$.

Dann gilt $\forall x \in B_r(x_0) \subseteq \mathbb{R}$

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (x-x_0)^{n-1}$$

Ferner ist $f \in C^\infty(B_r(x_0)) \subset \mathbb{R}$

beliebig oft diff. bar und
es gilt

$$a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Beweis (Forster § 2.1, Satz 2.6, Corollar)
(Benötigt Integration)

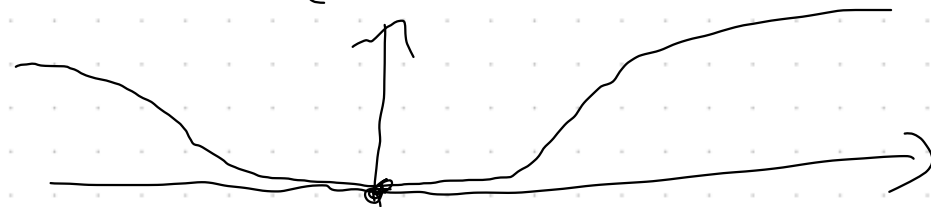
Achtung • f Potenzreihe, $r > 0$

$\Rightarrow$ Potenzreihe = Taylor-Reihe.

• Der Konvergenzradius der
Taylor-Reihe kann 0 sein

• Selbst wenn die Taylor-Reihe
von f konc., muß sie nicht
gegen f konvergieren!

Bsp: $f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$



Dann $f(0) = 0$, $f(x) \neq 0 \quad \forall x \neq 0$.

Es $f^{(n)}(0) = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$. D.h. die

Taylor-Reihe zu $x_0 = 0$ konvergiert
gegen $g \equiv 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$. $g \neq f$.