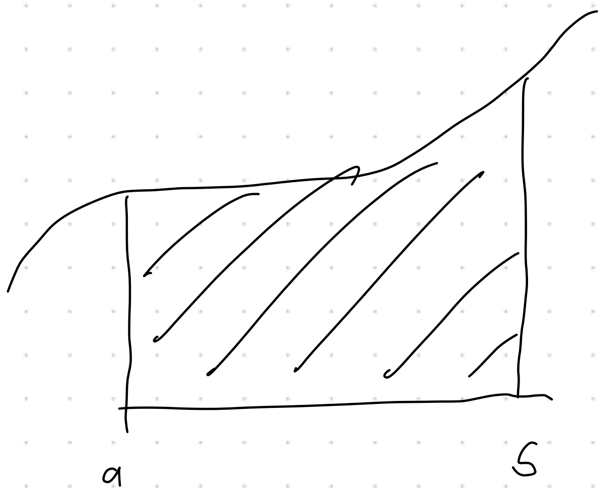
(204) Das Riemann-Integral

Ziel: Definiere $\int_a^b f(x)\,dx$

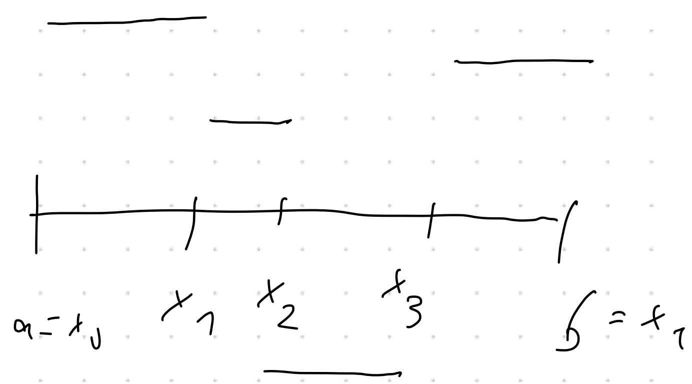


Erinnerung (VL 17):

$\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}$ heißt Treppenfkt., wenn

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$$

ex., so dass φ auf jedem (x_{k-1}, x_k) für $k = 1, \dots, n$ konstant ist



Im Folgenden sei

$$\mathcal{T}[a,b] = \{ \varphi : [a,b] \to \mathbb{R} \mid \varphi \text{ ist Treppenfkt.} \}$$

Bem: Die Menge

$$\mathbb{R}^{[a,b]} = \{ f : [a,b] \to \mathbb{R} \}$$

ist Vektorraum, mit $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$

$$(\lambda f)(x) = \lambda f(x)$$

mit $f \equiv 0$ als Nullelement.

(205)

<u>Bem</u> $\mathcal{T}[a,b]$ ist ein Unterraum von $\mathbb{R}^{[a,b]}$, d.h.

a) $0 \in \mathcal{T}[a,b]$

b) $\varphi, \psi \in \mathcal{T}[a,b] \Rightarrow \varphi + \psi \in \mathcal{T}[a,b]$

c) $\varphi \in \mathcal{T}[a,b], \lambda \in \mathbb{R} \Rightarrow \lambda\varphi \in \mathcal{T}[a,b]$

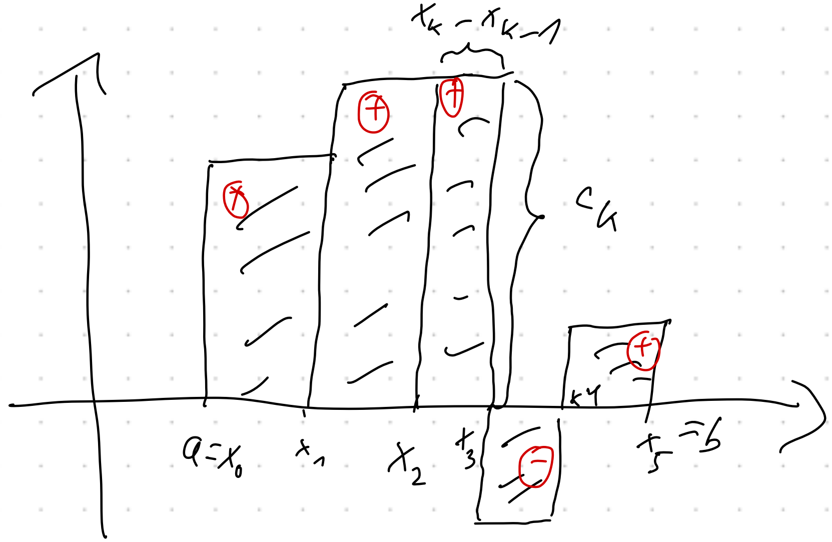
<u>Def 189</u> Sei $\varphi \in \mathcal{T}[a,b]$ und

$a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$

mit $\varphi|_{(x_{k-1}, x_k)} = c_k \in \mathbb{R}$, $k = 1, \dots, n$.

Dann setze

$$\int_a^b \varphi(x)\,dx := \sum_{k=1}^{n} c_k (x_k - x_{k-1}).$$



<u>Lemma 190</u> Die Def. von $\int_a^b \varphi(x)\,dx$ ist unabhängig von der gewählten Unterteilung, d.h. $\int_a^b \varphi(x)\,dx$ ist wohldef.

<u>Beweis</u> (Übung)

206 **Satz 1.9.1**

Seien $\varphi, \psi \in J[a,b]$, $\lambda \in \mathbb{R}$, dann gilt:

a) $\int_a^b (\varphi+\psi)(x)\,dx = \int_a^b \varphi(x)\,dx + \int_a^b \psi(x)\,dx$

b) $\int_a^b (\lambda\varphi)(x)\,dx = \lambda \int_a^b \varphi(x)\,dx$

c) $\varphi \leq \psi \Rightarrow \int_a^b \varphi(x)\,dx \leq \int_a^b \psi(x)\,dx$

[a)+b) „$\int_a^b$ ist linear" auf $J[a,b]$

c) „$\int_a^b$ ist monoton" auf $J[a,b]$]

Beweis a) Seien $\varphi, \psi \in J[a,b]$. OBdA seien φ, ψ konstant auf (x_{k-1}, x_k) für $a = x_0 < \dots < x_n = b$.

mit $\varphi|_{(x_{k-1},x_k)} = a_k$,

$\psi|_{(x_{k-1},x_k)} = b_k$.

$$\int_a^b (\varphi+\psi)(x)\,dx = \sum_{k=1}^n (a_k + b_k)(x_k - x_{k-1})$$
$$= \sum_{k=1}^n a_k(x_k - x_{k-1}) + \sum_{k=1}^n b_k(x_k - x_{k-1})$$
$$= \int_a^b \varphi(x)\,dx + \int_a^b \psi(x)\,dx.$$

b), c) (Übung).

Bem Seien $a = x_0 < \dots < x_n = b$ und $a = y_0 < \dots < y_m = b$ Unterteilungen für φ bzw. ψ. Setze dann

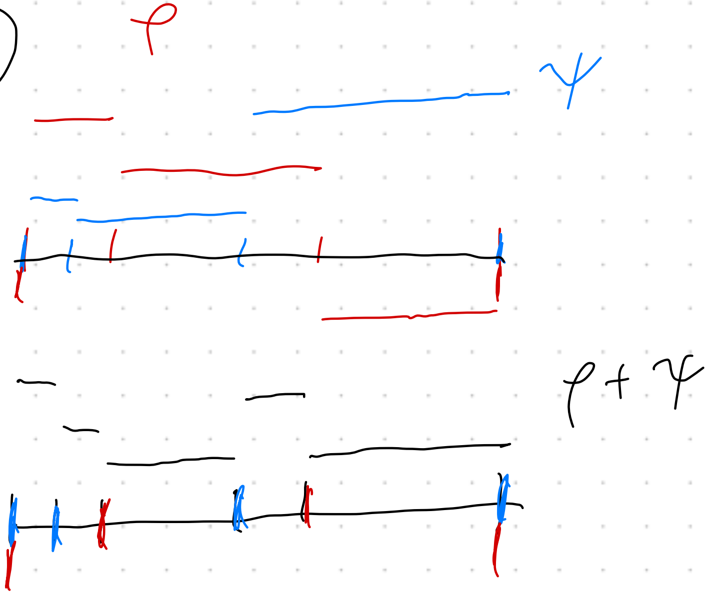
$\{x_0, \dots, x_n, y_0, \dots, y_m\} = \{z_0, z_1, \dots, z_\ell\}$

mit $a = z_0 < z_1 < \dots < z_\ell = b$.

Dann gilt $\ell \leq n+m$ und

$\varphi|_{(z_{k-1}, z_k)}$ und $\psi|_{(z_{k-1}, z_k)}$ sind konstant für $k = 1, \dots, \ell$.

207



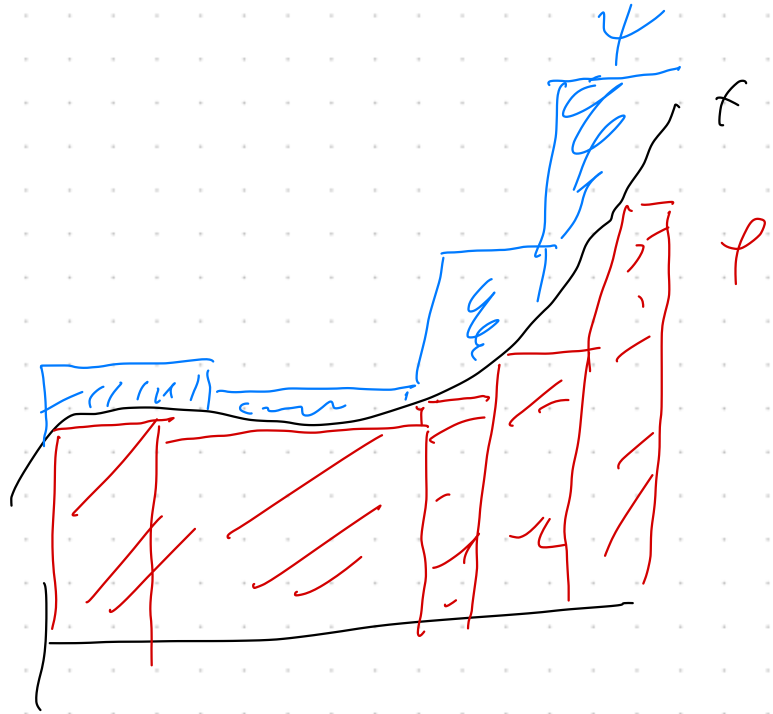
Notation:

Sei $f: A \to B$ und $M \subseteq A$, dann ist $f|_M : M \to B$ mit

$f|_M(x) = f(x) \quad \forall x \in M$.

$f|_M$ ist die Einschränkung von f auf M.

Idee (Def. von $\int_a^b f(x)dx$ für allgemeine f)



(20β) Def 1.92 Sei $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ beschränkt. Setze dann

$$\int_{a*}^{b} f(x)\,dx = \sup\left\{\int_a^b \varphi(x)\,dx \;\middle|\; \varphi\in \mathcal{T}[a,b],\ \varphi\le f\right\}$$ „Untersumme"

$$\int_a^{b*} f(x)\,dx = \inf\left\{\int_a^b \psi(x)\,dx \;\middle|\; \psi\in \mathcal{T}[a,b],\ f\le \psi\right\}$$ „Obersumme"

f heißt Riemann-integrierbar, wenn $\int_{a*}^{b} f(x)\,dx = \int_a^{b*} f(x)\,dx$.

Dann setzen wir

$$\int_a^b f(x)\,dx := \int_{a*}^{b} f(x)\,dx = \int_a^{b*} f(x)\,dx. \qquad (*)$$

$\int_a^b f(x)\,dx$ ist das Riemann-Integral von f auf $[a,b]$.

Bem Für $\varphi\in\mathcal{T}[a,b]$ gilt immer $\int_{a*}^{b}\varphi(x)\,dx = \int_a^{b*}\varphi(x)\,dx$,

d.h. $(*)$ ist konsistent mit Def 1.89 für $\int_a^b \varphi(x)\,dx$, $\varphi\in\mathcal{T}[a,b]$.

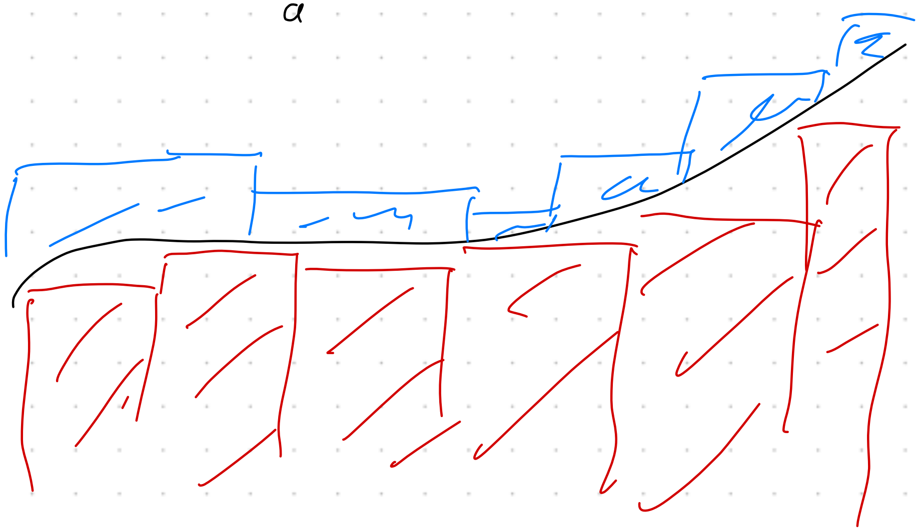
209 **Bem** Für $\varphi, \psi \in J[a,b]$ mit $\varphi \le f \le \psi$ gilt immer

$$\int_a^b \varphi(x)\,dx \le \int_a^b \psi(x)\,dx,$$ somit

$$\int_{a\,*}^{b} f(x)\,dx \le \int_a^{b\,*} f(x)\,dx.$$

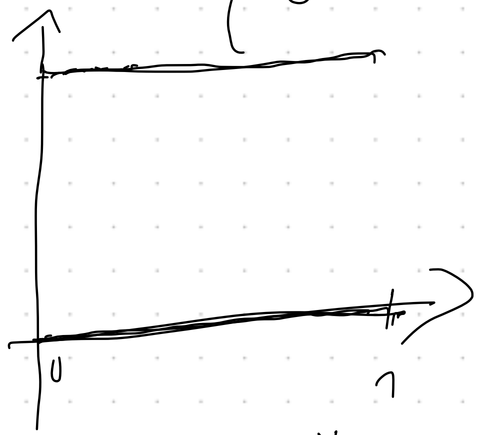
Falls f Riemann-integrierbar,

$$\int_a^b \varphi(x)\,dx \le \int_a^b f(x)\,dx \le \int_a^b \psi(x)\,dx.$$



Bsp Sei $f:[0,1] \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{falls } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$



Dann gilt für $\varphi \in J[a,b]$, $\varphi \le f$ immer

$$\int_a^b \varphi(x)\,dx \le 0$$

und für $\psi \in J[a,b]$, $f \le \psi$

$$1 \le \int_a^b \psi(x)\,dx$$

$$\Rightarrow \int_{a\,*}^{b} f(x)\,dx = 0 < 1 = \int_a^{b\,*} f(x)\,dx$$

$\Rightarrow$ f ist <u>nicht</u> Riemann-integrierbar.

210 Lemma 19.3 *) beschränkte

Eine *) Funktion $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ ist genau dann Riemann-int.bar, wenn zu jedem $\varepsilon>0$ Treppenfkt.en $\varphi,\psi\in\mathcal{T}[a,b]$ mit $\varphi\le f\le\psi$

und

$$\underbrace{\int_a^b \psi(x)\,dx-\int_a^b\varphi(x)\,dx\le\varepsilon.}_{\left|\int_a^b\psi(x)dx-\int_a^b\varphi(x)dx\right|\le\varepsilon.}$$

(*)

Beweis (*) $\Rightarrow$ Riemann-int.bar

Es gelte (*). Wähle Folgen $\varphi_n,\psi_n\in\mathcal{T}[a,b]$ mit $\varphi_n\le f\le\psi_n$ und

$$\int_a^b\psi_n(x)\,dx-\int_a^b\varphi_n(x)\,dx\le\frac{1}{n}.\quad(1)$$

Dann sind $\int_a^b\varphi_n(x)dx$ und $\int_a^b\psi_n(x)dx$ beschränkt.

Also ex. TF φ_{n_k},ψ_{n_k} mit

$$\int_a^b\varphi_{n_k}(x)dx\longrightarrow A,$$

$$\int_a^b\psi_{n_k}(x)dx\longrightarrow B.$$

Aus (1) folgt $\underbrace{\int_a^b\psi_{n_k}(x)dx-\int_a^b\varphi_{n_k}(x)dx}\to 0$
$B-A$

D.h. $A=B$.

Ferner gilt

$$A\le\int_{*a}^b f(x)dx\le\int_a^{*b}f(x)dx\le B$$

wegen $A=B$ gilt $\int_{*a}^b f(x)dx=\int_a^{*b}f(x)dx$.

Sei f Riemann-int.bar.

Dann ex. $\varphi,\psi\in\mathcal{T}[a,b]$ mit

$\varphi\le f$, $\int_{*a}^b f(x)-\int_a^b\varphi(x)dx\le\frac{\varepsilon}{2}$

$f\le\psi$, $\int_a^b\psi(x)-\int_a^{*b}f(x)dx\le\frac{\varepsilon}{2}$.

Addieren liefert (*). ☒

211 **Satz 194** Sei $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ stetig, dann ist f Riemann-int.bar.

Beweis Sei $\varepsilon>0$. Nach Satz 117 (V(17) ex. $\varphi,\psi\in T[a,b]$ mit $\varphi\le f\le\psi$ und

$$\underbrace{|\varphi(x)-\psi(x)|}_{\psi(x)-\varphi(x)}\le\frac{\varepsilon}{b-a}\quad\forall x\in[a,b].$$

Sei nun $g:[a,b]\to\mathbb{R}$ die konst. Funktion mit $g(x)=\frac{\varepsilon}{b-a}$ $\forall x\in[a,b]$.

Dann gilt $\psi(x)-\varphi(x)\le g(x)$ $\forall x\in[a,b]$.

Somit nach Satz 191 a) und c)

$$\int_a^b\psi(x)\,dx-\int_a^b\varphi(x)\,dx\underset{a)}{=}\int_a^b(\psi-\varphi)(x)\,dx\underset{c)}{\le}\int_a^b g(x)\,dx=\frac{\varepsilon}{b-a}(b-a)=\varepsilon.$$

Nach Lemma 193 ist f Riemann-int.bar. $\boxtimes$