218 Erinnerung

MWS (Satz 200)

Sei $\rho : [a,b] \to \mathbb{R}_0^+$ nicht negativ und int.bar und $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig.

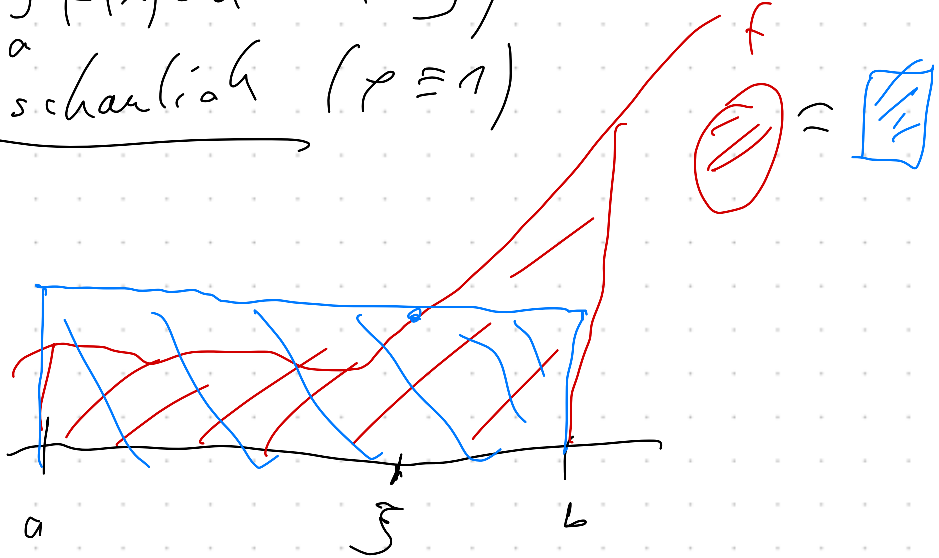
Dann $\xi \in [a,b]$ mit

$$\int_a^b f(x)\rho(x)\,dx = f(\xi)\int_a^b \rho(x)\,dx$$

insbes. für $\rho \equiv 1$

$$\int_a^b f(x)\,dx = f(\xi)\,(b-a)$$

Anschaulich ($\rho \equiv 1$)



Bem Für $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ int.bar heißt

$$\mathbb{E}(f) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$$

Mittelwert von f über $[a,b]$

und

$$\mathbb{E}_\rho(f) = \frac{1}{\int_a^b \rho(x)\,dx}\int_a^b f(x)\rho(x)\,dx$$

gewichteter Mittelwert von f bzg. ρ.

MWS:

$$\exists\, \xi \in [a,b] : \mathbb{E}_\rho(f) = f(\xi)$$

$$\exists\, \xi \in [a,b] : \mathbb{E}(f) = f(\xi)$$

219

Def 201 Setze

$$\int_a^a f(x)\,dx := 0$$

und für $a<b$

$$\int_b^a f(x)\,dx := -\int_a^b f(x)\,dx$$

$$\int_a^b f(x)\,dx + \int_b^a f(x)\,dx = 0 = \int_a^a f(x)\,dx$$

Lemma 202 Sei $a<b<c$, $f:[a,c]\to\mathbb{R}$.

Dann gilt

a) f int.bar $\Leftrightarrow$ $f|_{[a,b]}$ und $f|_{[b,c]}$ int.bar

b) f int.bar, dann

$$\int_a^c f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx$$

Beweis (Übung)

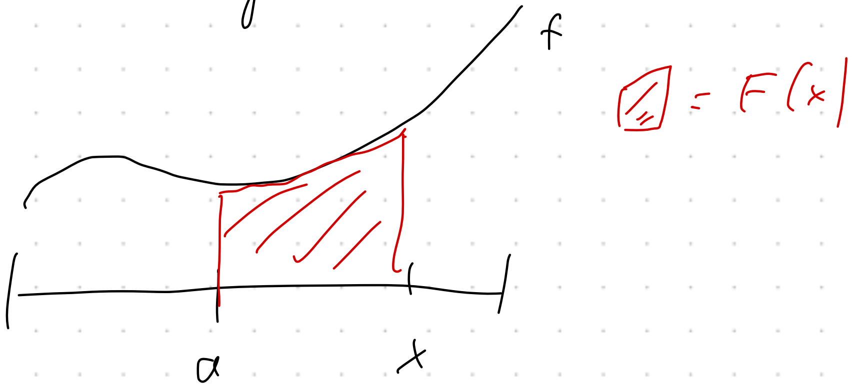
220

Satz 203

Sei I ein Intervall, $f: I \to \mathbb{R}$ stetig, $a \in I$ fest. Für $x \in I$ sei

$$F(x) := \int_a^x f(t)\,dt.$$

Dann ist $F: I \to \mathbb{R}$ diff.bar und es gilt $F' = f$.



Beweis Sei $h \neq 0$. Dann gilt

$$\frac{F(x+h)-F(x)}{h} = \frac{1}{h}\left(\int_a^{x+h} f(t)\,dt - \int_a^x f(t)\,dt\right)$$

$$= \frac{1}{h}\left(\underbrace{\int_a^x f(t)\,dt + \int_x^{x+h} f(t)\,dt}_{F(x+h)} - \underbrace{\int_a^x f(t)\,dt}_{F(x)}\right)$$

$$= \frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)\,dt$$

Nach MWS (Satz 200) ex. zu $h \neq 0$ ein $\xi_h \in [x, x+h]$ (bzw. $\xi_h \in [x+h, x]$ falls $h<0$) mit

$$\frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)\,dt = f(\xi_h)$$

$$\Rightarrow \frac{F(x+h)-F(x)}{h} = f(\xi_h)$$

Da $\xi_h \xrightarrow[h\to 0]{} x$ und f stetig, gilt

$$\lim_{\substack{h\to 0\\ h\neq 0}} \frac{F(x+h)-F(x)}{h} = \lim_{\substack{h\to 0\\ h\neq 0}} f(\xi_h) = f(x).$$

D.h. F diff.bar in x mit $F'(x) = f(x)$.

$\square$

(221) **Def 204** Seien $f, F: I \to \mathbb{R}$.

Dann heißt F Stammfunktion von f, falls $F' = f$.

Bem $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ heißt unbestimmtes Integral von f und ist Stammfunktion von f.

Satz 205 Sei $f: I \to \mathbb{R}$ und $F: I \to \mathbb{R}$ Stammfkt. von f. Dann:

($G: I \to \mathbb{R}$ ist Stammfkt. von f)
$\iff$ $F - G$ ist konstant.

Beweis: $F-G$ konstant $\Rightarrow G(x) = F(x) + c$

$\Rightarrow G'(x) = F'(x) = f(x) \Rightarrow G$ Stammfkt.

Sei G Stammfkt.: $\Rightarrow G'(x) = f(x)$

$\Rightarrow (F-G)'(x) = f(x) - f(x) = 0 \quad \forall x \in I$

$\Rightarrow F - G$ ist konstant (Kor 132, VL 19). ☐

Satz 206 (Fundamentalsatz der Differential- und Integralrechnung)

Sei $f: I \to \mathbb{R}$ stetig und $F: I \to \mathbb{R}$ eine Stammfunktion von f. Dann gilt für $[a,b] \subseteq I$

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a).$$

Beweis Sei $F_0(x) = \int_a^x f(t)\,dt$. Dann gilt $F(x) = F_0(x) + c$ und somit

$$F(b) - F(a) = F_0(b) - F_0(a)$$

$$= \int_a^b f(x)\,dx - \int_a^a f(x)\,dx$$

$$= \int_a^b f(x)\,dx.$$

☐

222

Notation

$$F(x)\Big|_a^b := \left[F(x)\right]_a^b := F(b)-F(a)$$

Dann (HDI)

$$\int_a^b f(x)\,dx = \left[F(x)\right]_a^b .$$

Forster: $\boxed{\int f(x)\,dx = F(x)}$ formal

$:\Longleftrightarrow \int_a^b f(x)\,dx = \left[F(x)\right]_a^b \quad \forall a,b$

$\Longleftrightarrow$ F ist Stammfkt. von f.

Bsp

a) $\int \sin(x)\,dx = -\cos(x)$

b) $\int \cos(x)\,dx = \sin(x)$

c) $\int x^k\,dx = \frac{1}{k+1}\,x^{k+1}$

d) $\int e^x\,dx = e^x$

223 (Substitutionsregel)

Integraltransformation

Satz 207 Sei $f: J \to \mathbb{R}$ stetig und $\varphi: [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig diff.bar mit $\varphi([a,b]) \subseteq J$. Dann gilt

$$\int_a^b f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)\,dx.$$

Beweis Sei $F: J \to \mathbb{R}$ Stammfkt. von f. Dann ist $F \circ \varphi : [a,b] \to \mathbb{R}$ diff.bar und es gilt

$$(F\circ\varphi)'(t) = F'(\varphi(t))\,\varphi'(t)$$
$$= f(\varphi(t))\,\varphi'(t)$$

Also:

$$\int_a^b f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt = \int_a^b (F\circ\varphi)'(t)\,dt$$
$$= \Big[(F\circ\varphi)(t)\Big]_a^b = F(\varphi(b)) - F(\varphi(a))$$
$$= \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)\,dx. \qquad \blacksquare$$

[**Merkregel**: (rein symbolisch!)

Setze $x = \varphi(t)$ $\quad \frac{d\varphi(t)}{dt} = \varphi'(t) = \frac{dx}{dt}$

$$\Rightarrow dx = \varphi'(t)\,dt$$

$$\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)\,\underline{dx} = \int_a^b f(\varphi(t))\,\underline{\varphi'(t)\,dt}$$
]

224 Bsp

a) $\int_a^b t f(t^2)\,dt$ $\left[\begin{array}{l}\varphi(t) = t^2 \\ \varphi'(t) = 2t\end{array}\right]$

$= \frac{1}{2}\int_a^b \varphi'(t) f(\varphi(t))\,dt$

$= \frac{1}{2}\int_{a^2}^{b^2} f(x)\,dx.$

b) Sei $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig diff.bar und $\varphi(t) \neq 0\ \forall t$

$\int_a^b \frac{\varphi'(t)}{\varphi(t)}\,dt = \int_a^b \frac{1}{\varphi(t)}\varphi'(t)\,dt$

$\boxed{f(x) = \frac{1}{x}}$ $= \int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt$

$= \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)\,dx = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} \frac{1}{x}\,dx$

$= \left[\log|x|\right]_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} = \left[\log|\varphi(t)|\right]_a^b$

Partielle Integration

Satz 208 Seien $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig diff.bar. Dann gilt

$\int_a^b f(x) g'(x)\,dx = \left[f(x)g(x)\right]_a^b - \int_a^b f'(x) g(x)\,dx$

Kurzschreibweise

$\int f g' = f g - \int f' g$

Beweis Sei $h(x) = f(x) g(x)$, dann

$h'(x) = f'(x) g(x) + f(x) g'(x)$. Also

$\left[f(x)g(x)\right]_a^b = \left[h(x)\right]_a^b = \int_a^b h'(x)\,dx$

$= \int_a^b f'(x) g(x) + f(x) g'(x)\,dx$

■

225 Bsp

a) $\int_a^b x e^x dx = [x e^x]_a^b - \int_a^b e^x dx$

$\boxed{\begin{aligned} &f(x) = x \\ &g'(x) = e^x,\ g(x) = e^x \end{aligned}}$

$= be^b - ae^a - [e^x]_a^b$

$= (b-1)e^b - (a-1)e^a$

$\Rightarrow \int x e^x = (x-1)e^x$

Probe $((x-1)e^x)' = 1e^x + (x-1)e^x$
$= xe^x$

b) $\int_a^b \sin^2(x) dx$

$= \int_a^b \sin(x) (-\cos)'(x) dx$

$= [\sin(x)(-\cos(x))]_a^b - \int_a^b \sin'(x)(-\cos)(x) dx$

$= -[\sin(x)\cos(x)]_a^b + \int_a^b \cos^2(x) dx$

$= -[\sin(x)\cos(x)]_a^b + \int_a^b 1 - \sin^2(x) dx$

$= -[\sin(x)\cos(x)]_a^b + [x]_a^b - \int_a^b \sin^2(x) dx$

$\Rightarrow 2\int_a^b \sin^2(x) dx = [x - \sin(x)\cos(x)]_a^b$

$\Rightarrow \int_a^b \sin^2(x) dx = \left[\frac{x - \sin(x)\cos(x)}{2}\right]_a^b$

$\Rightarrow \int \sin^2(x) dx = \frac{x - \sin(x)\cos(x)}{2}$.

226

$$\left(\frac{x - \sin(x)\cos(x)}{2}\right)'$$

$$= \frac{1}{2}\left(1 - \cos(x)\cos(x) - \sin(x)(-\sin(x))\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\underbrace{1 - \cos^2(x)} + \underbrace{\sin^2(x)}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\sin^2(x) + \sin^2(x)\right) = \sin^2(x)$$