227 **Taylor-Formel**

Im folgenden sei I ein nichttriviales Intervall, d.h. $I \neq \emptyset$, $I \neq \{a\}$.

Erinnerung Sei $f: I \to \mathbb{R}$ bel. oft diff.bar $a \in I$, dann heißt

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k$$

die Taylor-Reihe von f zum Entwicklungspunkt a.

Bem
- Für $f = \exp, \sin, \cos$ konv. Taylor-Reihe absolut gegen f.
- Taylor-Reihe ist Potenzreihe
- Aber:
  - Taylor-Reihe muß nicht konv.
  - Taylor-Reihe kann gegen $g \neq f$ konvergieren

Def 209 Sei $f: I \to \mathbb{R}$ n-mal diff.bar und $a \in I$, dann heißt

$$T_n[f,a](x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k,$$

$T_n[f,a]: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ das Taylor-Polynom n-ter Ordnung von f am Entwicklungspunkt a.

Bem $T_n[f,a]$ ist n-te Partialsumme der Taylor-Reihe.

Frage: Wann gilt $T_n[f,a](x) \xrightarrow[n\to\infty]{?} f(x)$?

- Wie groß ist der Fehler

$$f(x) - T_n[f,a](x) \quad ?$$

228

Bemerkung

$$R_{n+1}[f,a](x) = f(x) - T_n[f,a](x)$$
$$= f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$$

heißt Restglied der Taylor-approximation.

$$f(x) = T_n[f,a](x) + R_{n+1}[f,a](x)$$

Erinnerung Für f diff.bar gilt

$$f(x) = \underbrace{f(a) + f'(a)(x-a)}_{T_1[f,a](x)} + \underbrace{r(x-a)}_{R_2[f,a](x)}$$

mit $r(h) \in o(h)$ für $h \to 0$

(lineare Approximation von f durch die Tangente)

Tangente: Approx. durch lin. Fkt

$T_1[f,a] = T_1$ mit

$$T_1(a) = f(a), \quad T_1'(a) = f'(a)$$

Bem Für $k \leq n$

$$\left(T_n[f,a]\right)^{(k)}(a) = f^{(k)}(a)$$

$T_n(a) = f(a)$, $T_n'(a) = f'(a)$, $T_n''(a) = f''(a)$
$\ldots$, $T_n^{(n)}(a) = f^{(n)}(a)$.

$$\left(T_n^{(n+1)}(a) = 0\right)$$

Taylor-Polynom: Approx. durch Polynom vom Grad $\leq n$ mit

$$T_n(a) = f(a), \ldots, T_n^{(n)}(a) = f^{(n)}(a).$$

229 Restgliedarstellung

Satz 2.10 Sei $f: I \to \mathbb{R}$ $(n+1)$-mal stetig diff.bar und $a \in I$. Dann gilt $\forall x \in I$:

$$R_{n+1}(x) = f(x) - T_n(x)$$
$$= f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$$
$$= \int_a^x f^{(n+1)}(t) \frac{(x-t)^n}{n!} \, dt.$$

Taylor-Formel mit Integraldarstellung des Restglieds.

Beweis Induktion über $k = 0, \dots, n$

$k=0$ $R_1(x) = f(x) - T_0(x) = f(x) - f(a)$
$$= \int_a^x f'(t)\,dt = \int_a^x f'(t) \frac{(x-t)^0}{0!} \, dt.$$

$k-1 \Rightarrow k$ Angenommen es gilt

$$f(x) - T_{k-1}(x) = R_k(x) = \int_a^x f^{(k)}(t) \underbrace{\frac{(x-t)^{k-1}}{(k-1)!}}_{g'(t)} \, dt$$

mit $g(t) = -\frac{(x-t)^k}{k!}$.

Part. Integration

$$(*)\quad R_k(x) = \left[f^{(k)}(t) g(t) \right]_a^x - \int_a^x f^{(k+1)}(t) g(t) \, dt$$
$$\overset{g(x)=0}{=} + f^{(k)}(a) \frac{(x-a)^k}{k!} + \int_a^x f^{(k+1)}(t) \frac{(x-t)^k}{k!} \, dt$$

Also
$$R_{k+1}(x) = f(x) - T_k(x) = f(x) - \left(T_{k-1}(x) + \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k\right)$$
$$= R_k(x) - \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$$
$$\overset{(*)}{=} \int_a^x f^{(k+1)}(t) \frac{(x-t)^k}{k!} \, dt.$$

$\square$

230

Korollar 211 (Lagrange-Restglied)

Sei $f: I \to \mathbb{R}$ $(n+1)$-mal stetig diff.bar, $a \in I$. Dann:

$\forall x \in I \; \exists \xi = \xi(x)$ zwischen a und x mit

$$f(x) - T_n(x) = R_{n+1}(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$$

Beweis Nach MWS $\exists \xi$ mit

$$R_{n+1}(x) = \int_a^x \underbrace{f^{(n+1)}(t) \frac{(x-t)^n}{n!}}_{\varphi(t)} dt$$

$$= f^{(n+1)}(\xi) \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} dt$$

$$= f^{(n+1)}(\xi) \left[- \frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!} \right]_a^x$$

$$= f^{(n+1)}(\xi) \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}$$

$\square$

Korollar 212 (Peano-Restglied)

Sei $f: I \to \mathbb{R}$ n-mal stetig diff.bar, dann $\forall x \in I$

$$f(x) - T_n(x) = R_{n+1}(x) = \varphi(x)(x-a)^n$$

für ein φ mit $\lim_{x \to a} \varphi(x) = 0$.

Beweis Anwendung von Kor 211 für $n-1$ liefert

$$f(x) - T_n(x) = f(x) - T_{n-1}(x) - \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

$$\overset{\boxed{\text{Kor } 211}}{=} f^{(n)}(\xi) \frac{(x-a)^n}{n!} - f^{(n)}(a) \frac{(x-a)^n}{n!}$$

$$= \underbrace{\frac{f^{(n)}(\xi(x)) - f^{(n)}(a)}{n!}}_{\varphi(x)} (x-a)^n$$

Wegen $\xi(x) \xrightarrow[x \to a]{} a$ und Stetigkeit von $f^{(n)}$ gilt: $\varphi(x) \xrightarrow[x \to a]{} 0$.

$\square$

231

Bem Kor 212 mit Landau-Symbolen

$$f(x) - T_n(x) = R_{n+1}(x) = o(|x-a|^n)$$
für $x \to a$.

Satz 213 Sei $f: I \to \mathbb{R}$, $(n+1)$-mal stetig diff.bar und $a \in I$.

Dann sind äquivalent:

a) f ist Polynom mit $\text{grad}(f) \leq n$

b) $f^{(n+1)}(x) = 0 \quad \forall x \in I$

c) $f = T_n$

d) $R_{n+1}(x) = 0 \quad \forall x \in I$

Beweis

a) $\Rightarrow$ b) trivial ✓

b) $\Rightarrow$ c) Nach Kor 211 gilt

$$f(x) - T_n(x) = R_{n+1}(x) = \underbrace{f^{(n+1)}(\xi)}_{=0}(\ldots)$$
$$= 0$$

c) $\Leftrightarrow$ d) $f - T_n = R_{n+1}$

c) $\Rightarrow$ a) trivial, da T_n immer Polynom vom Grad $\leq n$ ist. ☐

232

Finale

Können wir f bel. gut durch Polynome approximieren?

Für T_n: leider nein!

Aber es gilt der

Weierstraß'sche Approximationssatz:

Satz 214 Sei $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ stetig, dann ex. zu jedem $\varepsilon>0$ ein Polynom p mit

$$\|f-p\|_\infty = \max_{x\in[a,b]} |f(x)-p(x)| < \varepsilon,$$

d.h. es ex. eine Folge $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Polynomen p_n mit $p_n \xrightarrow[n\to\infty]{glm} f$.

Beweis (Analysis II)

Bsp Bernsteinpolynome

für $f:[0,1]\to\mathbb{R}$

$$B_n[f](x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f\left(\frac{k}{n}\right) x^k (1-x)^{n-k}$$

mit $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$.

$B_n[f] \xrightarrow[n\to\infty]{glm} f$ (ohne Beweis).