

④

Motivation

Aus wir wollen $\int f(x) dx$ definieren

Einfachstes Beispiel $f(x) = 1$

$$\int_{\Omega} 1 \, dx$$



= „Flächeninhalt von Ω “ $\cdot 1$

Was ist der „Inhalt“ von Ω ?

Welche Mengen sind messbar?

Was heißt „Mengen messen“?

Bsp: $\Omega = [0, 1]^2$ $A(\Omega) = 1$

$\Omega = [a, b]$ $A(\Omega) = b - a$

$\Omega = [0, 1] \cap \mathbb{Q}$ $A(\Omega) = ?$

$\Omega = [0, 1] \setminus \mathbb{Q}$ $A(\Omega) = ?$

Fahrplan:

- σ -Algebren: geeignete Mengensysteme
- Maße: Messen von Mengen in σ -Algebren

1 σ -Algebren (Mengenalgebren)

Erinnerung Sei Ω eine Menge

- Potenzmenge $\mathcal{P}(\Omega) = \{M \subseteq \Omega\}$
- Für $A, B \in \mathcal{P}(\Omega)$ gilt

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ oder } x \in B\} \in \mathcal{P}(\Omega)$$

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ und } x \in B\} \in \mathcal{P}(\Omega)$$

$$A \setminus B = \{x \mid x \in A \text{ und } x \notin B\} \in \mathcal{P}(\Omega)$$

- Bel. Schritte und Vereinigungen

Sei I eine Indexmenge und

$A_i \in \mathcal{P}(\Omega)$ für jedes $i \in I$

$$\bigcup_{i \in I} A_i = \{x \mid \exists i \in I \text{ mit } x \in A_i\} \in \mathcal{P}(\Omega)$$

$$\bigcap_{i \in I} A_i = \{x \mid x \in A_i \, \forall i \in I\} \in \mathcal{P}(\Omega)$$

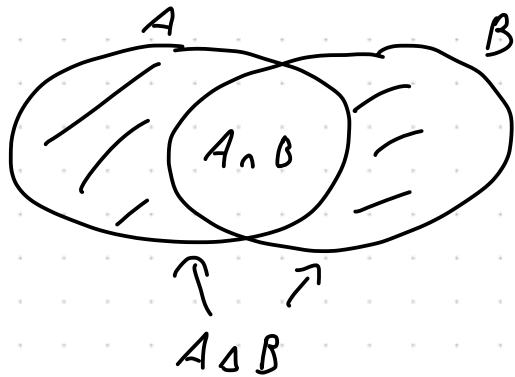
⑤

Konvention

$$\bigcup_{i \in \emptyset} A_i = \emptyset, \quad \bigcap_{i \in \emptyset} A_i = \Omega$$

symmetrische Differenz

$$A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$$



Komplement

$$(A^c = \Omega \setminus A)$$

Satz 1.1 Seien A, B, C, X, Y Mengen und Ω, I Mengen $A_i, X_i \subseteq \Omega \quad \forall i \in I$.
Dann gilt

- $A \Delta \emptyset = A, \quad A \Delta A = \emptyset$
- $A \Delta B = B \Delta A$
- $(A \Delta B) \Delta C = A \Delta (B \Delta C)$
- $(A \Delta B) \cap C = (A \cap C) \Delta (B \cap C)$
- $A \cap B = \emptyset \Rightarrow A \Delta B = A \cup B$
- $B \subseteq A \Rightarrow A \Delta B = A \setminus B$
- $X \cap Y = \emptyset \Rightarrow (A \cap B) \subseteq (X \Delta A) \cup (Y \Delta B)$
- $\left(\bigcup_{i \in I} X_i \right) \Delta \left(\bigcup_{i \in I} A_i \right) \subseteq \bigcup_{i \in I} (X_i \Delta A_i)$

Beweis Übung (elementar)

⑥ Def 1.2 Sei Ω eine Menge.
Ein System $\Sigma \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ von Teilmengen
von Ω heißt Mengen algebra auf Ω , falls:

- a) $\emptyset \in \Sigma$
- b) $A \in \Sigma \Rightarrow \Omega \setminus A \in \Sigma$
- c) $A, B \in \Sigma \Rightarrow A \cup B \in \Sigma$

gilt zusätzlich

c') $\forall \text{ Folgen } (A_k)_{k \in \mathbb{N}}, A_k \in \Sigma$

gilt $\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \in \Sigma$,

so heißt Σ eine σ -Algebra auf Ω .

Def 1.3 Sei Ω eine Menge und Σ
eine σ -Algebra auf Ω . Dann heißt das Paar
 (Ω, Σ) ein Messraum und $A \in \Sigma$ heißt
messbar bzgl. des Messraums.

Anschaulich: Messraum ein System von
Teilungen, für die man einen
„Inhalt“ sinnvoll definieren kann
Wie messen wir messbare Mengen?

Maße!

⑦

Notation

$$\mathbb{R}^+ := (0, \infty), \quad \mathbb{R}_0^+ := [0, \infty)$$

$$\overline{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$$

$$\mathbb{R}_0^+ = \mathbb{R}_0^+ \cup \{\infty\} = [0, \infty]$$

wobei

$$-\infty < a < \infty \quad \forall a \in \mathbb{R}$$

Konvention

$$a + (\pm\infty) = (\pm\infty) + a = \pm\infty \quad \forall a \in \mathbb{R}$$

$$a \cdot (\pm\infty) = (\pm\infty) \cdot a = \pm\infty \quad \forall a \in (0, \infty]$$

$$a \cdot (\pm\infty) = (\pm\infty) \cdot a = \mp\infty \quad \forall a \in [-\infty, 0)$$

$$0 \cdot (\pm\infty) = (\pm\infty) \cdot 0 = 0$$

Nicht definiert: $\infty + (-\infty), -\infty + \infty$ +, · auf $\overline{\mathbb{R}}$ definiert, assoziativ.

Achtung: kein Kürzen, wenn ∞ beteiligt,
da $1+\infty = \infty = 2+\infty, 1 \cdot \infty = \infty = 2 \cdot \infty$.

Falls $c_k \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} \infty$ (bzw. $-\infty$),
dann gilt $\forall a \in \mathbb{R}$

$$a + \lim_{k \rightarrow \infty} c_k = \lim_{k \rightarrow \infty} (a + c_k)$$

$$a \cdot \lim_{k \rightarrow \infty} c_k = \lim_{k \rightarrow \infty} (a \cdot c_k)$$

⑧ Def 1.4 Sei Ω eine Menge, $\Sigma \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ ein Mengensystem mit $\emptyset \in \Sigma$.

Sei eine Abbildung $\mu: \Sigma \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_0^+$ mit

a) $\mu(\emptyset) = 0$

b) Für $(A_k)_{k \in \mathbb{N}}$ $A_k \in \Sigma$, $A = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_k \in \Sigma$

$$\text{und } A_k \cap A_l = \emptyset \quad \forall k, l$$

$$\text{gilt } \mu(A) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k)$$

(σ -Additivität)

heißt Prämaß auf Σ .

Def 1.5 Sei (Ω, Σ) ein Messraum und $\mu: \Sigma \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_0^+$ ein Prämaß auf Σ , dann heißt μ ein Maß auf Σ und das Tripel (Ω, Σ, μ) ein Maßraum.

9

Wir wollen ein Maß auf einer möglichst großen σ -Algebra definieren, damit wir möglichst viele Mengen messen können. Das ist nicht ganz trivial!

Bsp a) Sei Ω eine nicht leere Menge,

$$\Sigma = \{\emptyset, \Omega\}$$

und

$$\mu(\emptyset) = 0, \mu(\Omega) = 1.$$

Dann ist Σ eine σ -Algebra und μ ein Maß auf Σ .

$$b) \Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

$$\Sigma = \mathcal{P}(\Omega)$$

$$\mu(\{a\}) = \frac{1}{6} \quad a = 1, \dots, 6$$

$$\mu(\{a_1, \dots, a_k\}) = \sum_{i=1}^k \mu(\{a_i\}) = \frac{k}{6}$$

$$\mu(A) = |A| \cdot \frac{1}{6}$$