10 Erinnerung

σ-Algebra:

- $\Sigma \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$
- $\emptyset \in \Sigma$
- $A \in \Sigma \Rightarrow \Omega \setminus A \in \Sigma$
- $A_1, \ldots \in \Sigma \Rightarrow \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \in \Sigma$

Maß

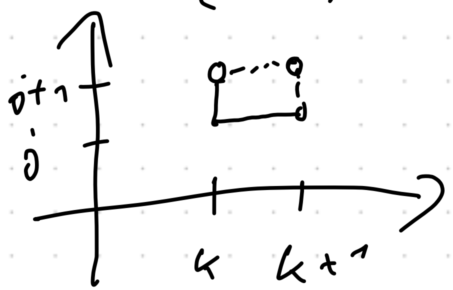
- $\mu : \Sigma \to \overline{\mathbb{R}}_0^+ = \mathbb{R}_0^+ \cup \{\infty\}$
- $\mu(\emptyset) = 0$
- $A_1, \ldots \in \Sigma,\ A_k \cap A_\ell = \emptyset\ \forall k \neq \ell$

$$\Rightarrow \mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k)$$

Bsp

c) Sei $\Omega = \mathbb{R}^2$,

$$\Sigma' = \{[k, k+1) \times [j, j+1) \mid k, j \in \mathbb{Z}\}$$



und

$$\Sigma = \{M \mid \exists I \text{ abz.bar}, Q_i \in \Sigma'\ \forall i \in I : M = \bigcup_{i \in I} Q_i\}$$

$\mu(Q) = 1 \quad \forall Q \in \Sigma'$

$\mu(A) = ? \qquad \forall A \in \Sigma$

sei $A \in \Sigma$ und $A = \bigcup_{k \in I} Q_k$, I abzählbar,

OBdA $Q_k \cap Q_\ell = \emptyset\ \forall k = \ell$

$$\mu(A) := \sum_{k \in I} \mu(Q_k).$$

(11) **Frage:** – Ist μ wohldefiniert?
– Ist μ ein Maß

Ang Σ' und $\mu : \Sigma' \to \overline{\mathbb{R}}_0^+$ gegeben und μ σ-additiv.

Können wir Σ' zu einer σ-Algebra Σ erweitern und μ zu einem Maß auf Σ fortsetzen?

Erinnerung Mengenalgebra

(i) $\emptyset \in \Sigma$

(ii) $A \in \Sigma \Rightarrow \Omega \setminus A \in \Sigma$

(iii) $A, B \in \Sigma \Rightarrow A \cup B \in \Sigma$

Bem (i)+(ii) $\Rightarrow \Omega = \Omega \setminus \emptyset \in \Sigma$

Def 1.6 Sei Ω eine Menge und $\Sigma \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$.
Dann heißt Σ ein Mengenring auf Ω, falls gilt

(i) $\emptyset \in \Sigma$

(ii) $A, B \in \Sigma \Rightarrow A \setminus B \in \Sigma$

(iii) $A, B \in \Sigma \Rightarrow A \cup B \in \Sigma$.

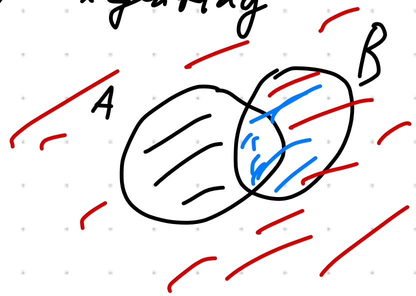
Bem Aus (i), (ii), (iii) folgt auch

$$A, B \in \Sigma \Rightarrow A \cap B = \underbrace{A \setminus (\underbrace{A \setminus B}_{\in \Sigma})}_{\in \Sigma} \in \Sigma.$$

Bem Σ Mengenalgebra $\Rightarrow$ Σ Mengenring

(i) ✓

(iii) ✓



(ii) Seien $A, B \in \Sigma$.

$$A \setminus B = \Omega \setminus \big((\underbrace{\Omega \setminus A}_{\in \Sigma}) \cup B \big) \in \Sigma$$

12

Bem Sei Σ Mengenring. Dann gilt
Σ Mengenalgebra $\Leftrightarrow$ $\Omega \in \Sigma$.

Bsp Ang. $\Omega \neq \emptyset$. Dann ist
$\Sigma = \{\emptyset\}$ Mengenring aber
keine Mengenalgebra

Satz 1.7 $\Sigma \in \mathcal{P}(\Omega)$ ist genau
dann ein Mengenring, wenn gilt
(i) $\emptyset \in \Sigma$
(ii) $A, B \in \Sigma \Rightarrow A \triangle B \in \Sigma$
(iii) $A, B \in \Sigma \Rightarrow A \cap B \in \Sigma$

Beweis Übung

Bem Ist Σ Mengenring mit den
Verknüpfungen
$\triangle$ (Addition)
und $\cap$ (Multiplikation)
Übung

(13) **Bsp** Sei

$$Q(\mathbb{R}) = \left\{ A \,\middle|\, A = \bigcup_{k=1}^{m} [a_i, b_i),\ a_i, b_i \in \mathbb{R} \right\} \quad m \in \mathbb{N}_0$$

d.h. $A \in Q(\mathbb{R}) \iff$

A ist endl. Vereinigung von halboffenen Intervallen.

Lemma 1.8 $Q(\mathbb{R})$ ist ein Mengenring über $\mathbb{R}$.

Beweis (i) $\emptyset = \bigcup_{k=1}^{0} I_k \in Q(\mathbb{R})$

(iii) klar

(ii) folgt aus

$$[a,b) \setminus [c,d) = [a, \min(b,c)) \cup [\max(a,d), b) \quad \square$$

$Q(\mathbb{R})$ „endliche Intervallsumme"

Produkte von Mengenringen

Satz 1.9 Seien $\Sigma_1 \subseteq \mathcal{P}(\Omega_1)$ und $\Sigma_2 \subseteq \mathcal{P}(\Omega_2)$ Mengenringe auf Ω_1 und Ω_2. Sei ferner

$$\Sigma_1 \boxtimes \Sigma_2 = \left\{ \bigcup_{i=1}^{m} A_i \times B_i \,\middle|\, A_i \in \Sigma_1,\ B_i \in \Sigma_2,\ m \in \mathbb{N}_0 \right\}$$

Dann ist $\Sigma_1 \boxtimes \Sigma_2$ ein Mengenring auf $\Omega_1 \times \Omega_2$.

Beweis (i), (iii) Klar

(ii) z.z. $X, Y \in \Sigma_1 \boxtimes \Sigma_2 \Rightarrow X \setminus Y \in \Sigma_1 \boxtimes \Sigma_2$

siehe Forster