(19) Idee

$$X = \bigcup_{i=1}^{m} A_i \times B_i$$

$$Y = \bigcup_{k=1}^{n} A_k' \times B_k'$$

$$X \setminus Y = \left(\bigcup_{i=1}^{m} A_i \times B_i\right) \setminus \left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k' \times B_k'\right)$$

$$= \bigcup_{i=1}^{m} \left(A_i \times B_i \setminus \bigcup_{k=1}^{n} A_k' \times B_k'\right)$$

$$= \bigcup_{i=1}^{m} Z_n$$

wobei $Z_\ell = A_i \times B_i \setminus \bigcup_{k=1}^{\ell} A_k' \times B_k'$

$$= Z_{\ell-1} \setminus \left(A_\ell' \times B_\ell'\right)$$

zeige induktiv, dass $\Sigma_\ell \in \Sigma_1 \boxtimes \Sigma_2$ gilt.

Quadersummen

Sei $\Omega = \mathbb{R}^n$. Eine Menge

$$Q = \bigtimes_{k=1}^{n} [a_k, b_k)$$

$$= [a_1, b_1) \times \dots \times [a_n, b_n)$$

$$= \{x \in \mathbb{R}^n \mid a_k \le x_k < b_k \ \forall k\}$$

mit $a_k, b_k \in \mathbb{R}$, $a_k < b_k$

heißt (halboffener) Quader.

Setze nun

$$Q(\mathbb{R}^n) = \underbrace{Q(\mathbb{R}) \boxtimes Q(\mathbb{R}) \boxtimes \dots \boxtimes Q(\mathbb{R})}_{n\text{-mal}}.$$

Dann ist $Q(\mathbb{R}^n)$ Mengenring über $\mathbb{R}^n$.

$A \in Q(\mathbb{R}^n) \Leftrightarrow A = \bigcup_{k=1}^{m} Q_k$, Q halboffene Quader

(15) Achtung $Q(\mathbb{R}^n)$ ist nur ein Mengenring und keine Mengenalgebra, da $\mathbb{R}^n \notin Q(\mathbb{R}^n)$.

Satz 1.10 Eine Mengenalgebra $\Sigma \subseteq P(\Omega)$ ist genau dann eine σ-Algebra, wenn für jede Folge $A_k \in \Sigma$ mit $A_1 \subseteq A_2 \subseteq \dots$ auch $\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \in \Sigma$ gilt $\Big\}$ (*)

Beweis z.z. (*) $\Leftrightarrow$ (**) $\left(A_k \in \Sigma \Rightarrow \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \in \Sigma \right)$

„$\Leftarrow$" ist klar.

„$\Rightarrow$" Ang. $A = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$. Setze dann

$$B_k = \bigcup_{j=1}^{k} A_j \text{ dann } B_k \in \Sigma$$

und $B_1 \subseteq B_2 \subseteq \dots$, also

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} B_k = \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcup_{j=1}^{k} A_j = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \in \Sigma. \quad \boxtimes$$

Korollar Die Aussage gilt auch für $B_k = \Omega \setminus A_k$, d.h. $B_1 \supseteq B_2 \supseteq \dots$, $\bigcap_{k=1}^{\infty} B_k \in \Sigma$.

(16) Bsp a) Sei (Ω, Σ) ein Messraum und $\Omega' \subseteq \Omega$, dann ist (Ω', Σ') mit

$$\Sigma' = \{\Omega' \cap A \mid A \in \Sigma\}$$

eine σ-Algebra auf Ω'.

b) Gilt zusätzlich $\Omega' \in \Sigma$, dann ist

$$\Sigma' = \Sigma \cap \mathcal{P}(\Omega') = \{A \subseteq \Omega' \mid A \in \Sigma\}$$

c) Sei (Ω, Σ) ein Messraum, Ω' eine Menge und $\varphi: \Omega' \to \Omega$.

Dann ist $\Sigma' = \varphi^{-1}(\Sigma) := \{\varphi^{-1}(A) \mid A \in \Sigma\}$ eine σ-Algebra auf Ω.

(Übung)

(17) Erzeugendensysteme

Beobachtung: Ist $(\Sigma_i)_{i \in I}$ eine Familie von von σ-Algebren auf Ω, so ist auch

$$\Sigma = \bigcap_{i \in I} \Sigma_i \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$$

eine σ-Algebra auf Ω.

Lemma 1.11 Sei Ω eine Menge $\Sigma' \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ beliebig und

$$S = \left\{ \hat{\Sigma} \subseteq \mathcal{P}(\Omega) \;\middle|\; \begin{array}{l} \hat{\Sigma} \text{ ist } \sigma\text{-Algebra auf } \Omega \\ \text{und } \Sigma' \subseteq \hat{\Sigma} \end{array} \right\}.$$

Dann ist $\Sigma = \bigcap_{\hat{\Sigma} \in S} \hat{\Sigma}$ die kleinste σ-Algebra auf Ω, die Σ' enthält.

Beweis $\cdot\,\Sigma$ ist σ-Algebra.
Ang. $\hat{\Sigma}$ ist eine kleinere σ-Algebra, die Σ' enthält, d.h. $\Sigma' \subseteq \hat{\Sigma} \subseteq \Sigma$. Dann gilt $\hat{\Sigma} \in S$ also auch $\Sigma \subseteq \hat{\Sigma}$, d.h. $\hat{\Sigma} = \Sigma$. ☑

Def. 1.12

$$\langle \Sigma' \rangle^{\sigma} = \bigcap_{\substack{\Sigma' \subseteq \hat{\Sigma} \subseteq \mathcal{P}(\Omega) \\ \hat{\Sigma} \text{ ist } \sigma\text{-Algebra auf } \Omega}} \hat{\Sigma}$$

heißt die von Σ' erzeugte σ-Algebra.

(15) **Wichtiges Beispiel**

Def 1.13 Sei $(\Omega, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum. Dann heißt

$$\mathcal{B}_{\mathcal{T}}(\Omega) := \langle \mathcal{T} \rangle^{\sigma}$$

die Borelsche oder Borel σ-Algebra und $M \in \mathcal{B}_{\mathcal{T}}(\Omega)$ eine Borel-Menge.

Bem $\mathcal{B}_{\mathcal{T}}(\Omega)$ ist die kleinste σ-Algebra, die alle offenen Mengen enthält.

Notation Wenn klar ist, welche Topologie gemeint ist, schreiben wir einfach $\mathcal{B}(\Omega)$. z.B. $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$.

Bem Es gilt auch

$$\mathcal{B}_{\mathcal{T}}(\Omega) = \langle \hat{\mathcal{T}} \rangle^{\sigma}$$

mit $\hat{\mathcal{T}} = \{ M \subseteq \Omega \mid M \text{ abgeschlossen} \}$,

D.h. $\mathcal{B}_{\mathcal{T}}(\Omega)$ enthält alle offenen und abgeschlossenen Mengen!

(19)

Satz 1.14 Die Borel σ-Algebra $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ wird vom Mengenring $\mathcal{Q}(\mathbb{R}^n)$ der endlichen Quadersummen erzeugt, d.h.

$$\mathcal{B}(\mathbb{R}^n) = \langle \mathcal{Q}(\mathbb{R}^n) \rangle^\sigma.$$

Es gilt sogar

$$\mathcal{B}(\mathbb{R}^n) = \langle \mathcal{Q}_{rat} \rangle^\sigma$$

wobei

$$\mathcal{Q}_{rat} = \{ Q \subseteq \mathbb{R}^n \mid \bigtimes_{k=1}^{n} [a_k, b_k \quad a, b \in \mathbb{Q}^n \}$$

die Menge aller Quader mit rationalen Eckpunkten ist.