

(20) Wiederholung:

Satz 1.14 Die Borel σ -Algebra $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ wird vom Mengerring $\mathcal{Q}(\mathbb{R}^n)$ der endlichen Quadersumme erzeugt, d.h.

$$\mathcal{B}(\mathbb{R}^n) = \langle \mathcal{Q}(\mathbb{R}^n) \rangle^\sigma.$$

Es gilt sogar

$$\mathcal{B}(\mathbb{R}^n) = \langle \mathcal{Q}_{\text{rat}} \rangle^\sigma$$

wobei

$$\mathcal{Q}_{\text{rat}} = \left\{ Q \subseteq \mathbb{R}^n \mid \bigtimes_{k=1}^n [a_k, b_k] \text{ mit } a_k, b_k \in \mathbb{Q} \right\}$$

die Menge aller Quader mit rationalen Eckpunkten ist.

Lemma 1.15 Jede offene Menge $V \subseteq \mathbb{R}^n$ ist disjunkte Vereinigung abzählbar vieler halboffener Würfel mit rationalen Eckpunkten.

Beweis (siehe Forster)

Dabei ist für $\mathcal{E}' \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ $\langle \mathcal{E}' \rangle^\sigma$ die kleinste σ -Algebra, die $\mathcal{E}'$ enthält.

(21)

Beweis Sei $Q = \bigcap_{k=1}^n [a_k, b_k]$ halboffener
(Satz 7.14) Quader, dann gilt für die offenen
Quader

$$Q_i = \bigcap_{k=1}^n (a_k - 2^{-i}, b_k)$$

$Q = \bigcap_{i \in \mathbb{N}} Q_i$ und somit
nach Satz 7.10 (bzw. Korollar)
wegen $Q_i \in \mathcal{I}$

$$Q(\mathbb{R}^n) \subseteq \langle \mathcal{I} \rangle^\sigma = B(\mathbb{R}^n),$$

also auch

$$\langle Q(\mathbb{R}^n) \rangle^\sigma \subseteq B(\mathbb{R}^n).$$

Ferner gilt nach Lemma 1.15

$$\mathcal{I} \subseteq \langle Q_{\text{rat}} \rangle^\sigma, \text{ also auch}$$

$$B(\mathbb{R}^n) = \langle \mathcal{I} \rangle^\sigma \subseteq \langle Q_{\text{rat}} \rangle^\sigma, \text{ d.h.}$$

$$B(\mathbb{R}^n) \subseteq \langle Q_{\text{rat}} \rangle^\sigma \subseteq \langle Q(\mathbb{R}^n) \rangle^\sigma \subseteq B(\mathbb{R}^n).$$

Also in B hier überall Gleichheit gelten $\square$

22

Erklärung

σ -Algebra $\Rightarrow$ Mengenalgebra $\Rightarrow$ Mengerring
Maß $\Rightarrow$ Prämaß $\Rightarrow$ (?)

Def 1.16 Sei $\Sigma \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ ein

Mengerring. Eine Abbildung

$\mu: \Sigma \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_0^+ = \mathbb{R}_0^+ \cup \{\infty\}$
heißt Inhalt auf Σ , wenn gilt

(i) $\mu(\emptyset) = 0$

(ii) $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$
 $\forall A, B \in \Sigma, A \cap B = \emptyset$

Bem a) Ang. $\mu: \Sigma \rightarrow \mathbb{R}_0^+$, dann gilt
(ii) $\Rightarrow$ (i), denn

$$\mu(\emptyset) = \mu(\emptyset \cup \emptyset) = \mu(\emptyset) + \mu(\emptyset),$$

also $\mu(\emptyset) = 2\mu(\emptyset) \Rightarrow \mu(\emptyset) = 0$.

b) Ein Inhalt ist monoton im Sinne, dass

$$A \subseteq B \Rightarrow \mu(A) \leq \mu(B),$$

denn für $A \subseteq B$ gilt

$$\mu(B) = \mu(A \cup B \setminus A) = \mu(A) + \underbrace{\mu(B \setminus A)}_{\geq 0}.$$

23) c) $A, B \in \Sigma \Rightarrow$

$$\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B|A)$$

$$\mu(B) = \mu(A \cap B) + \mu(B \setminus A)$$

Falls $\mu(A \cap B) < \infty$, folgt daraus

$$\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B) - \mu(A \cap B).$$

d) $A_1, \dots, A_m \in \Sigma, A_k \cap A_l = \emptyset \forall k \neq l$

$$\Rightarrow \mu\left(\bigcup_{k=1}^m A_k\right) = \sum_{k=1}^m \mu(A_k).$$

(Induktion)

Def 1.17 Sei Σ ein Mengensystem
und $\mu: \Sigma \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_0^+$ ein Inhalt. Dann heißt
a) μ σ -additiv, falls für

$A_1, A_2, \dots \in \Sigma$ mit $A_k \cap A_l = \emptyset \forall k \neq l$
gilt

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \in \Sigma \Rightarrow \mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k).$$

b) Ein σ -additiver Inhalt heißt Prämaß.

c) μ heißt endlich, falls
 $\mu(A) < \infty \forall A \in \Sigma$

d) μ heißt σ -endlich, falls
 $A_1, A_2, \dots \in \Sigma$ existieren mit
 $\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k = \Omega$ und $\mu(A_k) < \infty \forall k$.

(29) Das Lebesguesche Prämaß

Erinnerung:

$Q(\mathbb{R}^n) \hat{=}$ endliche Quadersammen.

$$\langle Q(\mathbb{R}^n) \rangle^\sigma = \langle \{M \subseteq \mathbb{R}^n \mid M \text{ offen}\} \rangle^\sigma$$

ist die Borel σ -Algebra

Ziel: Definiere ein Prämaß auf $Q(\mathbb{R}^n)$.

Sei $Q = \bigtimes_{k=1}^n [a_k, b_k) \in Q(\mathbb{R}^n)$ ein

halb offener Quader. Setze dann

$$\lambda^n(Q) := \text{Vol}_n(Q) = \prod_{k=1}^n (b_k - a_k)$$

Sei nun $A \in Q(\mathbb{R}^n)$. Dann können wir A als

$$A = \bigcup_{i=1}^m Q_i \quad (*)$$

für paarweise disjunkte Quader Q_i

schreiben und

$$\lambda^n(A) := \sum_{i=1}^m \lambda^n(Q_i) \quad (**)$$

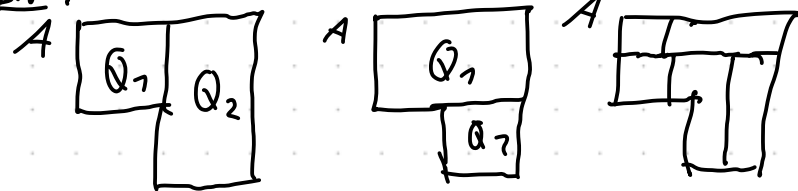
setzen.

Problem: Die Darstellung von A durch $(*)$ ist nicht eindeutig. Also müssen wir zeigen, daß $(**)$ unabhängig von der Zerlegung ist, damit

$$\lambda^n : Q(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}_0^+$$

wohl definiert ist.

Bsp:



(25) Lemma 1.18 Sei $Q \in \mathcal{Q}(\mathbb{R}^n)$ ein halboffener Quader und
 $Q = \bigcup_{i=1}^m Q^i$
 für m disjunkte halboffene Quader Q^i . Dann gilt

$$\lambda^n(Q) = \sum_{i=1}^m \lambda^n(Q^i).$$

Beweis: (Übung 2)

Lemma 1.19 Sei $A \in \mathcal{Q}(\mathbb{R}^n)$
 mit $A = \bigcup_{i=1}^m Q_i = \bigcup_{j=1}^{\tilde{m}} \tilde{Q}_j$.

für halb offene Quader $Q_i, \tilde{Q}_j$ mit
 $Q_i \cap Q_\ell = \emptyset \forall i \neq \ell$ und $\tilde{Q}_j \cap \tilde{Q}_\ell = \emptyset \forall j \neq \ell$

Dann gilt

$$\sum_{i=1}^m \lambda^n(Q_i) = \sum_{j=1}^{\tilde{m}} \lambda^n(\tilde{Q}_j).$$

Beweis: $\forall i$ gilt $Q_i = \bigcup_{j=1}^{\tilde{m}} \underbrace{Q_i \cap \tilde{Q}_j}_{\text{Quader oder leerv.}}$

Nach Lemma 1.18 gilt also

$$\lambda^n(Q_i) = \sum_{j=1}^{\tilde{m}} \lambda^n(Q_i \cap \tilde{Q}_j)$$

und analog

$$\lambda^n(\tilde{Q}_j) = \sum_{i=1}^m \lambda^n(\tilde{Q}_j \cap Q_i).$$

Somit

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^m \lambda^n(Q_i) &= \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^{\tilde{m}} \lambda^n(Q_i \cap \tilde{Q}_j) \\ &= \sum_{j=1}^{\tilde{m}} \lambda^n(\tilde{Q}_j). \end{aligned}$$

□