26

Satz 1.20 Der Inhalt
$\lambda^n : Q(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}_0^+$
ist σ-additiv und σ-endlich.

Bem Also ist λ^n ein Prämaß auf $Q(\mathbb{R}^n)$. λ^n heißt auch Lebesguesches oder Lebesgue Prämaß.

Für den Beweis brauchen wir:

Lemma 1.21 Sei $Q \in Q(\mathbb{R}^n)$ ein halboffener Quader. Dann ex. zu jedem $\varepsilon > 0$ halboffene Quader Q' und Q'' mit

$$\overline{Q'} \subseteq Q \subseteq \mathring{Q}''$$

und

$$\lambda_n(Q') \geq (1-\varepsilon)\lambda_n(Q), \quad (*)$$
$$\lambda_n(Q'') \leq (1+\varepsilon)\lambda_n(Q).$$

Beweis Sei $Q = \{x \in \mathbb{R}^n \mid a_k \leq x_k < b_k \ \forall k\}$

setze $Q' = \{x \in \mathbb{R}^n \mid a_k \leq x_k < b_k - \delta\}$

und $Q'' = \{x \in \mathbb{R}^n \mid a_k - \delta \leq x_k < b_k\}$

Dann gilt $\forall \delta > 0$

$$\overline{Q'} \subseteq Q \subseteq \mathring{Q}''$$

und für δ klein genug $(*)$. $\blacksquare$

(27) **Lemma 1.22** Sei $\mu : \Sigma \to \overline{\mathbb{R}}_0^+$ ein Inhalt auf einem Mengenring $\Sigma \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$. Dann gilt für

a) μ ist σ-additiv

b) μ ist σ-subadditiv, d.h.

$$\left(A_1, \ldots \in \Sigma,\ \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k =: A \in \Sigma\right)$$
$$\Rightarrow \mu(A) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k)$$

c) μ ist stetig von unten, d.h.

$$\left(A_1, \ldots \in \Sigma,\ A_k \uparrow A \in \Sigma\right)$$
$$\Rightarrow \mu(A_k) \nearrow \mu(A)$$

d) μ ist stetig von oben, d.h.

$$\left(B_1, \ldots \in \Sigma,\ B_k \downarrow B \in \Sigma,\ \mu(B_1) < \infty\right)$$
$$\Rightarrow \mu(B_k) \searrow \mu(B).$$

a) $\Leftrightarrow$ b) $\Leftrightarrow$ c) $\Rightarrow$ d)

Falls μ endlich d) $\Rightarrow$ c)

Notation $A_k \uparrow A :\Leftrightarrow \begin{cases} A_1 \subseteq A_2 \subseteq \ldots \\ \text{und } A = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \end{cases}$

$B_k \downarrow A :\Leftrightarrow \begin{cases} B_1 \supseteq B_2 \supseteq \ldots \\ \text{und } A = \bigcap_{k=1}^{\infty} B_k \end{cases}$

Beweis b) $\Rightarrow$ a)

Sei $A_1, \ldots \in \Sigma$, $A = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \in \Sigma$ und $A_k \cap A_l = \emptyset \ \forall k \neq l$. Dann gilt:

$$\sum_{k=1}^{m} \mu(A_k) = \mu\left(\bigcup_{k=1}^{m} A_k\right) \leq \mu(A), \quad (*)$$

also für $m \to \infty$:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k) \overset{(*)}{\leq} \mu(A) \overset{b)}{\leq} \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k).$$

Also gilt „=".

a) $\Rightarrow$ c) Sei $A_1, \ldots \in \Sigma$, $A_k \uparrow A \in \Sigma$.

Setze nun $A'_1 := A_1$ und $A'_k := A_k \setminus A_{k-1}$ $k \geq 2$.

Dann gilt $\bigcup_{k=1}^{m} A'_k = A_m \ \forall m$

und $A'_k \cap A'_l = \emptyset \ \forall l = k$.

28

und ferner $\bigcup_{k=1}^{m} A_k' = A$. Also

$$\sum_{k=1}^{m} \mu(A_k') = \mu(A_m)$$

und

$$\mu(A) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k') = \lim_{k\to\infty} \mu(A_m).$$

c) ⇒ b) Sei $A_1, \ldots \in \Sigma$, $A := \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \in \Sigma$.

Setze $\tilde{A}_m = \bigcup_{k=1}^{m} A_k$. Dann gilt

$$\mu(\tilde{A}_m) \leq \mu(A_1) + \mu\left(\bigcup_{k=2}^{m} A_k \setminus A_1\right)$$
$$\leq \mu(A_1) + \mu\left(\bigcup_{k=2}^{m} A_k\right)$$
$$\leq \ldots \leq \sum_{k=1}^{m} \mu(A_k).$$

Wegen c) und $\tilde{A}_m \uparrow A$ gilt auch

$$\mu(\tilde{A}_m) \uparrow \mu(A) \leq \sum_{k=1}^{m} \mu(A_k).$$

c) ⇒ d) und (d) endlich) ⇒ c) (Forster)

$\boxed{8}$

(29) <u>Beweis</u> (Satz 1.20)

Sei $A_1, \ldots \in Q(\mathbb{R}^n)$ eine Folge von Quadersummen mit

$$A := \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \in Q(\mathbb{R}^n).$$

Nach Lemma 1.21 ex. $\forall \varepsilon > 0$ $A', A_k'' \in Q(\mathbb{R}^n)$ mit

$$\overline{A'} \subseteq A, \quad \lambda^n(A') \geq (1-\varepsilon)\lambda^n(A)$$

$$A_k \subseteq \mathring{A}_k'', \quad \lambda^n(A_k'') \leq (1+\varepsilon)\lambda^n(A_k)$$

Insbesondere gilt

$$A' \subseteq \overline{A'} \subseteq A \subseteq \bigcup_{k=1}^{\infty} \mathring{A}_k''.$$

Da $\overline{A'}$ kompakt ist, ex. endlich viele $\mathring{A}_k''$, $k = 1, \ldots, m$ mit $A' \subseteq \overline{A'} \subseteq \bigcup_{k=1}^{m} \mathring{A}_k'' \subseteq \bigcup_{k=1}^{m} A_k''$.

Daraus folgt nun

$$(1-\varepsilon)\lambda^n(A) \leq \lambda^n(A') \leq \sum_{k=1}^{m} \lambda^n(A_k'')$$

$$\leq (1+\varepsilon) \sum_{k=1}^{\infty} \lambda^n(A_k)$$

Da dies für jedes $\varepsilon > 0$ gilt, gilt insbesondere

$$\lambda^n(A) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \lambda^n(A_k).$$

also ist λ^n σ-subadditiv und nach Lemma 1.22 σ-additiv.

Da $\mathbb{R}^n = \bigcup_{k=1}^{\infty} Q_k$ mit

$$Q_k = [-k, k)^n \text{ und } \lambda^n(Q_k) = (2k)^n < \infty$$

gilt, ist λ^n σ-endlich. $\boxtimes$