

(35)

Satz 7.30 Sei $\Sigma \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ eine
Mengen algebra, $\mu : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ ein
endliches Prämaß und $\tilde{\Sigma}$ wie
in Satz 7.30. Dann lässt sich
 μ eindeutig zu einem Maß
 $\tilde{\mu} : \tilde{\Sigma} \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ fortsetzen durch
 $\tilde{\mu} = \mu \Big|_{\tilde{\Sigma}}^*$.

Satz 7.31 Sei $\Sigma \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ ein
Mengenring auf Ω und
 $\mu : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ ein σ -endliches Prämaß.
Dann ex. genau eine Fortsetzung
von μ zu einem Maß
 $\mu : \tilde{\Sigma} \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ auf $\tilde{\Sigma} = \langle \Sigma \rangle^\sigma$
und zwar $\tilde{\mu} = \mu^* \Big|_{\tilde{\Sigma}}$, wobei
 μ^* das "äußere Maß" aus Satz 7.26
ist.

(36) Bourlins (Satz 7.30)

Eindeutigkeit

Seien $\mu_1, \mu_2 : \tilde{\Sigma} \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ zwei
Maße mit $\mu_1/\Sigma = \mu_2/\Sigma = \mu$.

Nach Konstruktion und Ben. von Satz 7.24

gilt auch $\mu_1/\Sigma^\uparrow = \mu_2/\Sigma^\uparrow = \mu$.

Sei nun $X \in \tilde{\Sigma}$ beliebig. Zu jedem $\varepsilon > 0$ ex. dann

$A \in \Sigma$ mit

$$\mu^*(X \Delta A) < \frac{\varepsilon}{2}$$

und $B \in \Sigma^\uparrow$ mit $X \Delta A \subseteq B$

$$\mu(B) < \mu^*(X \Delta A) + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$$

Nun gilt

$$A \setminus B \subseteq A \setminus (X \Delta A) \subseteq X \subseteq A \cup (X \Delta A) \subseteq A \cup B.$$

also

$$\mu_i(A \setminus B) \leq \mu_i(X) \leq \mu_i(A \cup B)$$

Ferner gilt

$$\mu_i(A \setminus B) \equiv \mu_i(A) - \mu_i(B) = \mu(A) - \mu(B) > \mu(A) - \varepsilon$$

und

$$\mu_i(A \cup B) \leq \mu_i(A) + \mu_i(B) = \mu(A) + \mu(B) < \mu(A) + \varepsilon$$

Also

$$\mu(A) - \varepsilon \leq \mu_i(X) \leq \mu(A) + \varepsilon$$

$$\Rightarrow |\mu_1(X) - \mu_2(X)| \leq 2\varepsilon \quad \forall \varepsilon > 0$$

$$\Rightarrow \mu_1(X) = \mu_2(X).$$

Zeige nun: μ^*/Σ ist ein Maß.

Laut Lemma 1.22 gilt für einen Inhalt:

σ -subadditiv $\Leftrightarrow \sigma$ -additiv.

Da μ^* als äußeres Maß σ -subadditiv
ist, reicht es zu z.z. dass μ^*/Σ Inhalt ist.

(37)

z.z. $\mu^*/\tilde{\Sigma}$ ist Inhalt.

a) $\mu^*/\tilde{\Sigma}(\emptyset) = \mu(\emptyset) = 0 \quad \checkmark$

b) Seien nun $X, Y \in \tilde{\Sigma}$ mit $X \cap Y = \emptyset$. Wir müssen zeigen, dass $\mu^*(X \cup Y) = \mu^*(X) + \mu^*(Y)$.

Seien dazu $A_k, B_k \in \Sigma$ Folgen mit

$$A_k \xrightarrow{\mu^*} X, \quad B_k \xrightarrow{\mu^*} Y.$$

Dann gilt

$$(1) \quad \lim \mu^*(A_k) + \mu^*(B_k) = \mu^*(X) + \mu^*(Y).$$

Wegen

$$(X \cup Y) \Delta (A_k \cup B_k) \subseteq (X \Delta A_k) \cup (Y \Delta B_k)$$

folgt daraus

$$\begin{aligned} & |\mu^*(X \cup Y) - \mu^*(A_k \cup B_k)| \\ & \leq d(X \cup Y, A_k \cup B_k) \\ & = \mu^*(X \cup Y \Delta A_k \cup B_k) \\ & \leq \mu^*(X \Delta A_k) \cup \mu^*(Y \Delta B_k) \\ & = d(X, A_k) + d(Y, B_k) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0, \end{aligned}$$

Also

$$(2) \quad \mu^*(X \cup Y) = \lim_{k \rightarrow \infty} \mu^*(A_k \cup B_k) \quad (2)$$

Wegen (1) ist noch zu zeigen:

$$(3) \quad \lim \mu^*(A_k \cup B_k) = \lim \mu^*(A_k) + \mu^*(B_k).$$

Nach Satz 1.1g) folgt aus $X \cap Y = \emptyset$

$$A_k \cap B_k \subseteq (X \Delta A_k) \cup (Y \Delta B_k)$$

also

$$\mu(A_k \cap B_k) \leq \mu^*(X \Delta A_k) + \mu^*(Y \Delta B_k) \rightarrow 0$$

Und somit

$$\begin{aligned} \lim \mu^*(A_k \cup B_k) &= \underbrace{\lim \mu^*(A_k) + \mu^*(B_k)}_{= \mu^*(X) + \mu^*(Y)} + \lim \mu^*(A_k \cap B_k) \\ &= \mu^*(X) + \mu^*(Y) + 0. \quad \square \end{aligned}$$

(38) Beweis (Satz 1.31) (Sei $\mathcal{B} = \langle \Sigma \rangle^\sigma$)

Da μ σ -endlich, ex. Folge $\Omega_m \in \Sigma$ mit $\Omega_m \uparrow \Omega$ und $\mu(\Omega_m) < \infty$.

Setze

$$\Sigma_m = \Sigma \cap \Omega_m = \{A \cap \Omega_m \mid A \in \Sigma\} \text{ und}$$

$$\mathcal{B}_m = \mathcal{B} \cap \Omega_m = \{A \cap \Omega_m \mid A \in \mathcal{B}\}.$$

Wegen $\Omega_m \in \Sigma$ gilt $\Omega_m \in \Sigma_m$. Also ist Σ_m Mengenalgebra auf Ω_m und es gilt $\mathcal{B}_m = \langle \Sigma_m \rangle^\sigma$ (Übung).

Da $\mu(\Omega_m) < \infty$ ist

$\mu|_{\Sigma_m}$ ein endliches Prämaß

und wir können Satz 1.30 auf $(\Omega_m, \Sigma_m, \mu|_{\Sigma_m})$ anwenden.

Sei $\tilde{\mu}_m : \mathcal{B}_m \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ die eindeutige Fortsetzung.

Wegen $\mathcal{B}_{m-1} \subseteq \mathcal{B}_m$ ist dann $\tilde{\mu}_m|_{\mathcal{B}_{m-1}}$ auch eine Fortsetzung.

Also gilt wegen Eindeutigkeit

$$\tilde{\mu}_m|_{\mathcal{B}_{m-1}} = \tilde{\mu}_{m-1}.$$

Sei nun $X \in \mathcal{B} = \langle \Sigma \rangle^\sigma$. Dann gilt

$$X \cap \Omega_m \uparrow X.$$

Für eine Fortsetzung $\tilde{\mu} : \mathcal{B} \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ muß also gelten, dass

$$\tilde{\mu}(X) = \sup_m \tilde{\mu}_m(\underbrace{X \cap \Omega_m}_{\in \mathcal{B}_m}).$$

Dann muß $\tilde{\mu}$ eindeutig sein (falls existiert).

Wir zeigen nun, dass dieses $\tilde{\mu}$ ein Maß ist.

(39)

1. Schritt: $\tilde{\mu}(X) = \mu^*(X) \quad \forall X \in \mathcal{B}$.

$$\text{Setze } X_m := X \cap \Omega_m$$

$$\text{und } Y_1 := X_1, Y_m = X_m \setminus X_{m-1}, m \geq 2$$

Dann gilt

$$X = \bigcup_{m=1}^{\infty} X_m, \quad X_m = \bigcup_{k=1}^m Y_k$$

$$X = \bigcup_{k=1}^{\infty} Y_k.$$

Wegen Satz 27.30 gilt nun

$$\mu^*(X_m) = \tilde{\mu}_m(X_m),$$

$$\mu^*(Y_k) = \tilde{\mu}_m(Y_k).$$

Da μ^* σ -subadditiv ist, gilt nun

$$\mu^*(X) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \mu^*(Y_k) = \sup_m \sum_{k=1}^m \underbrace{\mu^*(Y_k)}_{=\tilde{\mu}_m(Y_k)}$$

$$= \sup_m \tilde{\mu}_m(X_m) \xrightarrow{\nearrow} \tilde{\mu}(X)$$

per Def. von $\tilde{\mu}$.

$$\text{Andererseits gilt } X_m \subseteq X \text{ und somit } \tilde{\mu}(X) = \sup_m \tilde{\mu}_m(X_m) = \sup_m \mu^*(X_m) \leq \mu^*(X).$$

$$\text{Also } \tilde{\mu}(X) = \mu^*(X).$$

2. Schritt zeige nun, dass $\tilde{\mu}$ additiv ist.

Seien $X, Y \in \mathcal{B}$ mit $X \cap Y = \emptyset$.

$$\text{Setze } X_m = X \cap \Omega_m, Y_m = Y \cap \Omega_m.$$

Dann gilt:

$$\tilde{\mu}_m(X_m) \nearrow \tilde{\mu}(X),$$

$$\tilde{\mu}_m(Y_m) \nearrow \tilde{\mu}(Y)$$

$$\text{und wegen } X_m \cup Y_m = (X \cup Y) \cap \Omega_m$$

$$\tilde{\mu}_m(X_m \cup Y_m) \nearrow \tilde{\mu}(X \cup Y), \text{ also}$$

$$\tilde{\mu}(X \cup Y) = \lim \tilde{\mu}_m(X_m \cup Y_m)$$

$$= \lim (\tilde{\mu}_m(X_m) + \tilde{\mu}_m(Y_m))$$

$$= \tilde{\mu}(X) + \tilde{\mu}(Y).$$

$$\boxed{\begin{array}{l} \tilde{\mu}_m \text{ Maß,} \\ X_m \cap Y_m = \emptyset \end{array}} \nearrow$$