(40)

3. Schritt Da $\tilde{\mu}$ additiv ist, ist $\tilde{\mu}$ ein Inhalt. Da μ^* ein äußeres Maß ist, ist $\tilde{\mu} = \mu^*|_{\mathcal{B}}$ σ-subadditiv und somit nach Lemma 1.22 σ-additiv.
Also ist $\tilde{\mu} = \mu^*|_{\mathcal{B}}$ ein Maß. $\boxtimes$

Ergänzung Jedes $X \in \mathcal{B} = \langle \Sigma \rangle^\sigma$ mit $\tilde{\mu}(X) < \infty$ ist Σ-approximierbar, d.h.

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists A \in \Sigma : \mu^*(X \Delta A) < \varepsilon.$$

(siehe Forster)

Bemerkung 1.33 Sei $\mu : \Sigma \to \overline{\mathbb{R}}_0^+$ ein σ-endliches Prämaß auf einem Mengenring $\Sigma \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ und $\tilde{\mu} : \langle \Sigma \rangle^\sigma \to \overline{\mathbb{R}}_0^+$ seine Fortsetzung zu einem Maß auf $\langle \Sigma \rangle^\sigma$.
Dann stimmen die von μ und $\tilde{\mu}$ erzeugten äußeren Maße $\mu^*, \tilde{\mu}^* : \mathcal{P}(\Omega) \to \overline{\mathbb{R}}_0^+$ überein.

Beweis (Forster)

41

Def 1.32 Sei $\lambda^n : Q(\mathbb{R}^n) \to \overline{\mathbb{R}}_0^+$ das Lebesgue-Prämaß. Dann heißt die eindeutige Fortsetzung $\lambda^n : \mathcal{B}(\mathbb{R}^n) \to \overline{\mathbb{R}}_0^+$ von λ^n auf $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n) = \langle Q(\mathbb{R}^n) \rangle_\sigma$ das <u>Lebesgue-Borel-Maß</u>.

Insbesondere ist $\lambda^n(X)$ für alle offenen und abgeschlossenen Mengen definiert.

$(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n), \lambda^n)$ heißt <u>Lebesgue-Borel-Maßraum</u>.

Def 1.33 Sei (Ω, Σ, μ) ein Maßraum, $\mu^* : \mathcal{P}(\Omega) \to \overline{\mathbb{R}}_0^+$ das zugehörige äußere Maß. Eine Teilmenge $A \subseteq \Omega$ heißt μ-Nullmenge, falls $\mu^*(A) = 0$.

Für $\mu = \lambda^n$ auch: Lebesgue-Nullmenge.

Bem Da μ^* σ-subadditiv ist, gilt für eine Folge $A_k \subseteq \Omega$ von Nullmengen:

$$\mu^*\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \mu^*(A_k) = 0,$$

d.h. abzählbare Vereinigungen von Nullmengen sind Nullmengen.

(42) **Bsp** a) $\emptyset$ ist Nullmenge

b) Betrachte $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n), \lambda^n)$

Sei $a \in \mathbb{R}^n$ und $A = \{a\}$.

Dann gilt für $\varepsilon > 0$ bel und

$$A_\varepsilon = \left\{x \in \mathbb{R}^n \,\middle|\, a_i - \frac{\sqrt[n]{\varepsilon}}{2} \leq x_i < a_i + \frac{\sqrt[n]{\varepsilon}}{2}\right\}$$

$\{a\} = A \subseteq A_\varepsilon$ und $\lambda^n(A_\varepsilon) = \varepsilon$,

also $\mu^*(\{a\}) = 0$

c) Alle endlichen und abzählbaren $A \subseteq \mathbb{R}^n$ sind Lebesgue-Nullmengen.

Bem $\mathbb{R}^n$ ist überabzählbar.

Beweis: Wegen $\lambda^n([0,1)^n) = 1 \neq 0$ kann $[0,1)$ nicht abzählbar sein (sonst $\lambda^n([0,1)^n) = 0$), also auch nicht $\mathbb{R}^n$.

Satz 1.34 Sei $a_k, b_k \in \mathbb{R}$, $k = 1, \dots, n$ und $a_k \leq b_k$. Dann ist der kompakte Quader $Q = \bigtimes_{k=1}^n [a_k, b_k]$ in $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ und es gilt $\lambda^n(Q) = \prod_{k=1}^n (b_k - a_k)$.

Beweis Zu $m \in \mathbb{N}$ sei

$$Q_m = \bigtimes_{k=1}^n [a_k, b_k + \tfrac{1}{m}).$$

Dann ist Q_m eine absteigende Folge in $Q(\mathbb{R}^n)$ mit $Q = \bigcap_{m=1}^\infty Q_m$, also

$$\lambda^n(Q) = \lim_{m \to \infty} \lambda^n(Q_m) = \prod_{k=1}^n (b_k - a_k).$$

$\boxtimes$

Falls $a_k = b_k$ für mind. ein k, so gilt $\lambda^n(Q) = 0$.

Konsequenz: Sei $H_i(c)$ die Hyperebene $H_i(c) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x_i = c\}$, dann gilt $\lambda^n(H_i(c)) = 0$

(43) Für eine Nullmenge $X \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ mit $\mu^*(X) = 0$ muß nicht $X \in \Sigma$ gelten. Aber es gilt stets: $\exists A \in \Sigma$ mit $X \subseteq A$, $\mu(A) = 0$, denn wegen $\mu^*(X) = 0$ ex. Folge $A_k \in \Sigma$ mit $X \subseteq A_k$ und $\mu(A_k) \leq \frac{1}{k}$ (Def. von μ^*). Somit gilt für $A := \bigcap_{k=1}^{\infty} A_k$

$X \subseteq A$ und $\mu^*(A) = 0$.

Def 1.37 ← vorgezogen Ein Maßraum (Ω, Σ, μ) heißt vollständig, wenn Σ alle Nullmengen enthält.

Falls (Ω, Σ, μ) nicht vollständig ist, setze

$$\Sigma^\mu := \{A \cup N \mid A \in \Sigma, N \subseteq \Omega, \mu^*(N) = 0\}.$$

und für $X = A \cup N \in \Sigma^\mu$

$$\mu(A \cup N) := \mu(A)$$

Proposition 1.38 $(\Omega, \Sigma^\mu, \mu)$ ist ein vollständiger Maßraum.

Beweis (Übung).

(44) Dieser Maßraum heißt Vervollständigung von (Ω, Σ, μ).

Die Vervollständigung $(\mathbb{R}^n, \overline{\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)}^{\lambda^n}, \lambda^n)$ des Lebesgue-Borel-Maßraums heißt <u>Lebesgue-Maßraum</u>.

$A \in \overline{\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)}^{\lambda^n}$ heißt <u>Lebesgue-messbar</u>.

$A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ heißt <u>Borel-messbar</u>.