45

Satz 1.35 $A \subseteq \mathbb{R}^n$ ist genau dann eine Lebesgue-Nullmenge, wenn gilt: $\forall \varepsilon > 0$ $\exists$ Folg W_k, $k \geq 1$ von kompakten Würfeln $W_k \subseteq \mathbb{R}^n$ mit $A \subseteq \bigcup_{k=1}^{\infty} W_k$, $\sum_{k=1}^{\infty} \lambda^n(W_k) < \varepsilon$. (*)

Beweis (Forster)

Satz 1.36 Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $F : U \to \mathbb{R}^n$ stetig diff.bar.
Dann gilt für jedes $A \subseteq U$:
A Nullmenge $\Rightarrow$ $F(A)$ Nullmenge.

Beweis U läßt sich als
$U = \bigcup_{k=1}^{\infty} Q_k$ für kompakte Quader Q_k
darstellen. Wegen
$A = A \cap U = \bigcup_{k=1}^{\infty} A \cap Q_k$
reicht es, für einen kompakten Quader Q_k zu zeigen, dass $F(A \cap Q_k)$ Nullmenge ist. Da $\|DF(x)\|$ beschränkt auf Q_k beschränkt ist, $\exists L \geq 0$ mit
$\|F(x) - F(y)\| \leq L \|x - y\|$ $\forall x, y \in Q_k$.
Für einen Würfel W mit Kantenlänge h ist $F(W \cap Q_k)$ also in einem Würfel mit Seitenlänge $L\sqrt{n}\,h$, also gilt
$\lambda^n(F(W \cap Q_k)) \leq (L\sqrt{n})^n \lambda^n(W)$.
Da $A \subseteq \bigcup_{m=1}^{\infty} W_m$ mit $\sum_m \lambda^n(W_m) < \varepsilon$
$\Rightarrow \lambda^n(F(A \cap Q_k)) \leq (L\sqrt{n})^n \varepsilon$. ☒

2 Integration messbarer Funktionen

Def 2.1 Seien (Ω_1, Σ_1) und (Ω_2, Σ_2) Messräume mit $\Sigma_1 \subseteq \mathcal{P}(\Omega_1)$ und $\Sigma_2 \subseteq \mathcal{P}(\Omega_2)$. Dann heißt $f: \Omega_1 \to \Omega_2$ <u>messbar</u> (bzgl. Σ_1 und Σ_2), fall gilt

$$f^{-1}(X) \in \Sigma_1 \quad \forall X \in \Sigma_2 .$$

(Urbilder messbarer Mengen sind messbar.)

Satz 2.2 Seien (Ω_1, Σ_1) und (Ω_2, Σ_2) Messräume, $\mathcal{E}$ ein Erzeugendensystem von Σ_2, d.h. $\Sigma_2 = \langle \mathcal{E} \rangle^\sigma$. Für $f: \Omega_1 \to \Omega_2$ gelte

$$f^{-1}(X) \in \Sigma_1 \quad \forall X \in \mathcal{E},$$

dann ist f messbar.

Beweis Wir betrachten

$$\mathbb{D} := \{ X \in \Sigma_2 \mid f^{-1}(X) \subseteq \Sigma_1 \}.$$

Dann gilt $\mathcal{E} \subseteq \mathbb{D}$. Ferner gilt

a) $f^{-1}(\emptyset) = \emptyset \in \Sigma_1$, also $\emptyset \in \mathbb{D}$

b) $X \in \mathbb{D} \Rightarrow f^{-1}(\Omega_2 \setminus X) = \Omega_1 \setminus \underbrace{f^{-1}(X)}_{\in \Sigma_1} \in \Sigma_1$,
also $\Omega_2 \setminus X \in \mathbb{D}$

c) $X_k \in \mathbb{D}, k = 1, \dots \Rightarrow f^{-1}\left(\bigcup_{k=1}^\infty X_k\right) = \bigcup_{k=1}^\infty \underbrace{f^{-1}(X_k)}_{\in \Sigma_1} \subseteq \Sigma_1$,
also $\bigcup_{k=1}^\infty X_k \in \mathbb{D}$.

Somit ist $\mathbb{D}$ σ-Algebra. Wegen $\mathcal{E} \subseteq \mathbb{D}$ gilt aber auch

$$\Sigma_2 = \langle \mathcal{E} \rangle^\sigma \subseteq \mathbb{D},$$

denn $\langle \mathcal{E} \rangle^\sigma$ ist die <u>kleinste</u> σ-Algebra, die $\mathcal{E}$ enthält.

Also gilt insbes.:

$X \in \Sigma_2 \Rightarrow X \in \mathbb{D} \Rightarrow f^{-1}(X) \in \Sigma_1$, d.h. f messbar. ∎

(47)

Lemma 2.3 Seien (Ω_1, Σ_1), (Ω_2, Σ_2) und (Ω_3, Σ_3) Messräume und $f: \Omega_1 \to \Omega_2$, $g: \Omega_2 \to \Omega_3$ messbar. Dann ist $g \circ f: \Omega_1 \to \Omega_3$ messbar.

Beweis $A \in \Sigma_3 \Rightarrow g^{-1}(A) \in \Sigma_2$

$\Rightarrow f^{-1}(g^{-1}(A)) = (g \circ f)^{-1}(A) \in \Sigma_1$.

Lemma 2.4 Seien Ω_1, Ω_2 topologische Räume und $f: \Omega_1 \to \Omega_2$ stetig. Dann ist f messbar bzgl. der Borel-σ-Algebren $\mathcal{B}_1$ und $\mathcal{B}_2$ von Ω_1 und Ω_2.

Beweis Sei $\mathcal{T}_2$ die Topologie von Ω_2. Dann gilt für $A \in \mathcal{T}_2$: A offen $\Rightarrow f^{-1}(A)$ offen in Ω_1 $\Rightarrow f^{-1}(A) \in \mathcal{B}_1$. Wegen $\mathcal{B}_2 = \langle \mathcal{T}_2 \rangle^\sigma$ folgt Meßbarkeit aus Satz 2.2. $\boxtimes$

Ist $f: (\Omega, \Sigma) \to (\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$ messbar, so heißt f auch Borel-messbar.

Bsp Für $A \subseteq \Omega$ sei

$$\chi_A : \Omega \to \mathbb{R}, \quad \chi_A(x) = \begin{cases} 1 & x \in A \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

die charakteristische Funktion von A.

Dann gilt:

χ_A messbar $\Leftrightarrow \chi_A^{-1}(\{1\}) = A$ messbar

Erweiterung von $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ auf $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$:

$$\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}) = \{B, B \cup \{\infty\}, B \cup \{+\infty, -\infty\}, B \cup \{-\infty\} \mid B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\}$$

Dann ist $\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})$ die kleinste σ-Algebra, die $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ sowie $\{\infty\}$, $\{-\infty\}$ enthält.

(48) **Notation** Für $f : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ und $c \in \mathbb{R}$ setze:

$$\{f > c\} := \{x \in \Omega \mid f(x) > c\} = f^{-1}((c, \infty])$$

$$\{f \geq c\} := f^{-1}([c, \infty])$$

$$\{f < c\} := f^{-1}([-\infty, c))$$

$$\{f \leq c\} := f^{-1}([-\infty, c])$$

$$\{a \leq f < b\} := f^{-1}([a, b))$$

...

Satz 2.5 Sei (Ω, Σ) ein Messraum, $f, g : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ messbar. Dann gilt

$$\{f > g\}, \{f \geq g\}, \{f = g\}, \{f \neq g\} \in \Sigma.$$

Beweis Es gilt $f(x) > g(x)$

$\Leftrightarrow \exists r \in \mathbb{Q} : g(x) < r < f(x)$, also

$$\{f > g\} = \bigcup_{r \in \mathbb{Q}} \left(\{f > r\} \cap \{r > g\} \right) \in \Sigma$$

somit auch

$$\{f \geq g\} = \Omega \setminus \overbrace{\{g > f\}}^{\in \Sigma} \in \Sigma,$$

$$\{f = g\} = \{f \geq g\} \setminus \{f > g\} \in \Sigma$$

$$\{f \neq g\} = \Omega \setminus \{f = g\} \in \Sigma. \quad \square$$

Satz 2.6 Sei (Ω, Σ) ein Messraum, $f, g, f_k : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ messbar, $\forall k$. Dann

a) cf messbar $\forall c \in \mathbb{R}$

b) $|f|^p$ messbar $\forall p \in \mathbb{R}^+$

c) $f+g$ messbar, falls auf ganz Ω def.

d) fg messbar

e) $\max(f,g)$, $\min(f,g)$ messbar

f) $\sup\limits_k (f_k)$, $\inf\limits_k (f_k)$ messbar

g) $\limsup\limits_k (f_k)$, $\liminf\limits_k (f_k)$ messbar

Wobei max, min, sup, inf punktweise und

$\limsup\limits_k f_k = \inf\limits_n \left(\sup\limits_{k>n} f_k \right)$, $\liminf\limits_k = \sup\limits_n \left(\inf\limits_{k>n} f_k \right)$

Beweis (Forster)

Korollar 2.7 $f : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ messbar, dann

$f_+ = \max(f, 0)$, $f_- = \max(-f, 0)$ messbar.

Bem $f_+, f_- \geq 0$, $f = f_+ - f_-$