

(50) Erinnerung:

$f: (\Omega_1, \Sigma_1) \rightarrow (\Omega_2, \Sigma_2)$  messbar

$(\Rightarrow) f^{-1}(A) \in \Sigma_1 \quad \forall A \in \Sigma_2$

$(\Rightarrow)$  Urbilder messbarer Mengen sind messbar

Jetzt zu: Def. von  $\int f(x) dx$

1. einfache Funktionen  $f: \Omega \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_0^+$

2.  $f: \Omega \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_0^+$

3.  $f: \Omega \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$

Def 2.8 Sei  $(\Omega, \Sigma)$  ein Messraum.

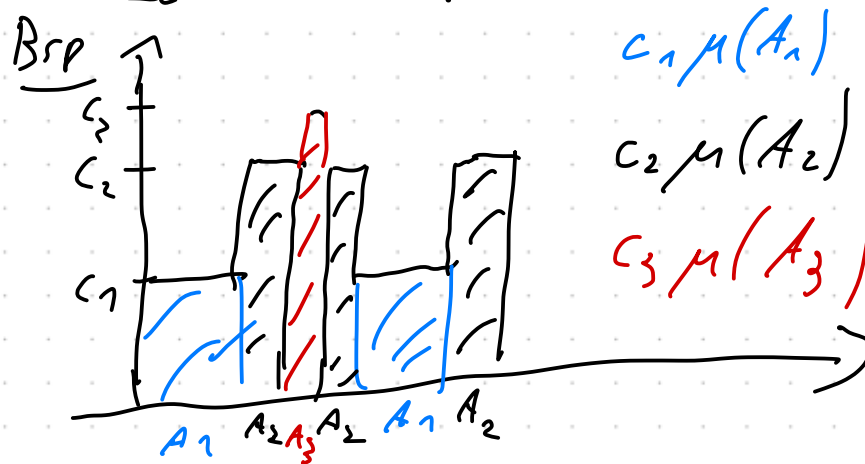
Eine Funktion  $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  heißt einfach, wenn  $f$  nur endlich viele verschiedene Werte annimmt und messbar ist.

Def. 2.9 Sei  $(\Omega, \Sigma, \mu)$  ein Maßraum

und  $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}_0^+$  einfach und  $c_1, \dots, c_m \in \mathbb{R}$  mit  $A_i = f^{-1}(\{c_i\})$

und  $\Omega = A_1 \cup \dots \cup A_m$ . Setze dann

$$\int_{\Omega} f d\mu := \sum_{i=1}^m c_i \mu(A_i)$$



(51) Satz 2.10 Sei  $(\Omega, \Sigma)$  ein Messraum  
und  $f: \Omega \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_0^+$  messbar.

Dann ex. eine aufsteigende  
Folge

$0 \leq p_1 \leq p_2 \leq \dots \leq p_k \leq p_{k+1} \leq \dots$   
einfacher Funktionen  $p_k: \Omega \rightarrow \mathbb{R}_0^+$   
mit  $p_k \nearrow f$  punktweise, d.h.  
 $p_k(x) \nearrow f(x) \quad \forall x \in \Omega.$

Beweis Für  $k \geq 1$  setze  $\underbrace{I_{k,i}}_{k \cdot 2^{-k}}$   
Dann zerlegt  $[0, k) = \bigcup_{i=0}^{k \cdot 2^k - 1} [i \cdot 2^{-k}, (i+1) \cdot 2^{-k})$   
 $[0, k]$  in  $k \cdot 2^k$  disjunkte Teilinter-  
valle der Länge  $2^{-k}$ .

Setze nun

$$\hat{A}_k = f^{-1}([k, \infty]) = \{f \geq k\}$$

$$A_{k,i} = f^{-1}(I_{k,i}) = \{i \cdot 2^{-k} \leq f < (i+1) \cdot 2^{-k}\}$$

$$c_{k,i} = i \cdot 2^{-k} \quad \hat{c}_k = k$$

Dann gilt für  $x \in A_{k,i}$

$$c_{k,i} = i \cdot 2^{-k} \leq f(x)$$

und für  $x \in \hat{A}_k$

$$\hat{c}_k = k \leq f(x)$$

$$\text{Setze nun } p_k := \sum_{i=0}^{k \cdot 2^k - 1} c_{k,i} \chi_{A_{k,i}} + \hat{c}_k \chi_{\hat{A}_k}$$

Dann gilt wegen

$$A_{k,i} = A_{k+1,2i} \cup A_{k+1,2i+1}$$

$$p_k \leq p_{k+1} \text{ und ferner } p_k \leq f \quad \forall k.$$

Außerdem

$$0 \leq f(x) - p_k(x) < 2^{-k} \quad \text{falls } f(x) < k$$

und

$$p_k(x) = k$$

$$\text{falls } f(x) \geq k$$

Also gilt  $p_k(x) \nearrow f(x) \quad \forall x \in \Omega.$

(52)

Für messbare  $f: \Omega \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_0^+$   
können wir nun setzen:

$$\int_{\Omega} f d\mu = \int_{\Omega} f(x) d\mu(x) := \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\Omega} f_k d\mu$$

Z.z. - Existenz des Grenzwerts  
- Wohldefiniertkeit

- Eigenschaften

Wünschenswert:

(i) Normierung  $\int_{\Omega} \chi_A d\mu = \mu(A) \quad \forall A \in \Sigma$

(ii) Linearität  $\int_{\Omega} c_1 f + c_2 g d\mu = c_1 \int_{\Omega} f d\mu + c_2 \int_{\Omega} g d\mu$

(iii) Monotonie:  $f \leq g \Rightarrow \int_{\Omega} f d\mu \leq \int_{\Omega} g d\mu$

(iv) "Stetigkeit"  $f_k \rightarrow f \Rightarrow \int_{\Omega} f_k d\mu \rightarrow \int_{\Omega} f d\mu$

Notation

$\int_{\Omega} f d\mu = \int_{\Omega} f(x) d\mu(x)$

Lemma 2.11 Die Definition von  
 $\int_{\Omega} f d\mu$  für einfache Funktionen  
 $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}_0^+$  hängt nicht von der  
Darstellung ab, d.h. ist wohldef.

Beweis: Übung

(53) Satz 2.6 Sei  $(\Omega, \Sigma, \mu)$  ein Maßraum  
und  $f, f_k: \Omega \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ ,  $k \geq 1$

einfache Funktionen, dann gilt

(i),

(ii)  $\forall c_1, c_2 \geq 0$ ,

(iii),

(iv) für  $f_k \nearrow_{k \rightarrow \infty} f$ .