

(54)

Satz 2.12 Sei (Ω, Σ, μ) ein Maßraum
und $f, g, f_n: \Omega \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ einfache Funktionen,
dann gilt

$$(0) \quad \int_{\Omega} \chi_A d\mu = \mu(A) \quad \forall A \in \Sigma$$

$$(i) \quad \int_{\Omega} \alpha f d\mu = \alpha \int_{\Omega} f d\mu \quad \forall \alpha \geq 0.$$

$$(ii) \quad \int_{\Omega} f + g d\mu = \int_{\Omega} f d\mu + \int_{\Omega} g d\mu$$

$$(iii) \quad f \leq g \Rightarrow \int_{\Omega} f d\mu \leq \int_{\Omega} g d\mu$$

$$(iv) \quad f_n \nearrow f \Rightarrow \int_{\Omega} f_n d\mu \rightarrow \int_{\Omega} f d\mu$$

Beweis

$$(0) \quad \int_{\Omega} \chi_A d\mu = 1 \cdot \mu(f^{-1}(\{1\})) + 0 \cdot \mu(f^{-1}(\{0\})) \\ = 1 \cdot \mu(A) + 0 \cdot \mu(\Omega \setminus A) = \mu(A).$$

$$(i) \quad \text{Sei } f(\Omega) = \{c_1, \dots, c_m\} \\ \text{und } A_i := f^{-1}(\{c_i\}).$$

$$\text{Dann gilt } (\alpha f)(\Omega) = \{ \alpha c_1, \dots, \alpha c_m \}$$

$$\text{und } \int_{\Omega} \alpha f d\mu = \sum_{i=1}^m \alpha c_i \cdot \mu(f^{-1}(\{c_i\})) \\ = \alpha \sum_{i=1}^m c_i \cdot \mu(A_i) = \alpha \int_{\Omega} f d\mu$$

$$(ii) \quad \text{Sei } f = \sum_{i=1}^m c_i \cdot \chi_{A_i} \text{ und } g = \sum_{j=1}^n d_j \cdot \chi_{B_j} \\ \text{mit } A_i, B_j \in \Sigma \text{ und } \Omega = \cup A_i = \cup B_j.$$

⊗

Dann gilt für

$$C_{ij} = A_i \cap B_j \in \Sigma$$

$$f = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_i \cdot \chi_{C_{ij}}, \quad g = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n d_j \cdot \chi_{C_{ij}} \\ \text{und } f + g = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n (c_i + d_j) \cdot \chi_{C_{ij}}.$$

(55) Also

$$\begin{aligned}\int_{\Omega} f+g d\mu &= \sum_{i,j} (c_i + d_j) \mu(C_{ij}) \\&= \sum_{i,j} c_i \mu(C_{ij}) + \sum_{i,j} d_j \mu(C_{ij}) \\&= \sum_i c_i \left(\sum_j \mu(C_{ij}) \right) + \sum_j d_j \left(\sum_i \mu(C_{ij}) \right) \\&= \sum_i c_i \mu(A_i) + \sum_j d_j \mu(B_j) \\&= \int_{\Omega} f d\mu + \int_{\Omega} g d\mu.\end{aligned}$$

(iii) Es gelte wieder $\textcircled{*}$. Dann folgt aus $f \leq g$:

$$\begin{aligned}C'_{ij} = A_i \cap B_j \neq \emptyset \Rightarrow c_i = f|_{C'_{ij}} \leq g|_{C'_{ij}} = d_j \\ \Rightarrow \int_{\Omega} f d\mu = \sum_{i,j} c_i \mu(C'_{ij}) \leq \sum_{i,j} d_j \mu(C'_{ij}) \\ = \int_{\Omega} g d\mu\end{aligned}$$

(iv) 1. Fall $\int_{\Omega} f d\mu = \infty$

Dann ex $A \in \mathcal{Z}$ mit $\mu(A) = \infty$
und $c > 0$ mit $f \geq c \chi_A$.

Setze nun

$$A_k := \left\{ x \in A \mid f_k(x) \geq \frac{c}{2} \right\} \in \mathcal{Z}$$

Aus $f_k \nearrow f$ folgt nun $A_k \uparrow A$,
also $\mu(A_k) \rightarrow \infty$. Wegen $f_k \geq \frac{c}{2} \chi_{A_k}$
also $\int_{\Omega} f_k d\mu \geq \frac{c}{2} \mu(A_k) \rightarrow \infty$.

2. Fall $\int_{\Omega} f d\mu < \infty$. Setze dann

$g_k = f - f_k$. Wegen $f_k \nearrow f$ gilt
dann $g_k \searrow 0$. Für (v) müssen wir nun

$\int_{\Omega} g_k d\mu \rightarrow 0$ zeigen.

(56) Sei dazu $M := \sup \{g_1(x) \mid x \in \Omega\} \in \mathbb{R}_0^+$
und $S := \{x \in \Omega \mid g_1(x) > 0\}$.

Dann gilt wegen $0 \leq \int_{\Omega} f_k d\mu \leq \int_{\Omega} f d\mu < \infty$

auch $\int_{\Omega} g_1 d\mu < \infty$ und somit

$\mu(S) < \infty$. Sei nun $\varepsilon > 0$.

Setze

$$S_k := \{x \in S \mid g_k(x) \leq \varepsilon\}.$$

wegen $g_k \searrow 0$ gilt dann $S_k \nearrow S$
also wegen

$$g_k(x) \begin{cases} = 0 & x \in \Omega \setminus S \\ \leq M & x \in S \setminus S_k \\ \leq \varepsilon & x \in S_k \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} g_k d\mu &\leq \varepsilon \mu(S_k) + M(\mu(S) - \mu(S_k)) \\ &\leq \varepsilon \mu(S) + M(\underbrace{\mu(S) - \mu(S_k)}_{\rightarrow 0}) \\ &\rightarrow 0. \quad \square \end{aligned}$$

Def 2.13 Sei (Ω, Σ, μ) ein Maßraum
und $f: \Omega \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_0^+$ messbar. Nach Satz 2.10
ex. $p_k: \Omega \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ einfach mit $p_k \nearrow f$.

Setze dann

$$\int_{\Omega} f d\mu := \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\Omega} p_k d\mu \in \overline{\mathbb{R}}_0^+.$$

Bem: Wegen $p_k \leq p_{k+1}$ ist

$\int_{\Omega} p_k d\mu$ monoton wachsend.

Also ex. $\lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\Omega} p_k d\mu \in \overline{\mathbb{R}}_0^+$

immer. (ggf. $= \infty$)

(57)

Lemma 2.14 Def. 2.13 ist wohldef.

Satz 2.15 Sei (Ω, Σ, μ) ein Maßraum
und $f, g, f_k: \Omega \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_0^+$ messbar $\forall k$.
Dann gelten (i) - (iv) aus Satz 2.12.

(58) Def 2.16 Sei (Ω, Σ, μ) ein Maßraum. Eine Funktion $f: \Omega \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ heißt μ -integrierbar bzw. integrierbar, wenn f messbar ist, sowie

$$\int_{\Omega} f_+ d\mu < \infty \text{ und } \int_{\Omega} f_- d\mu < \infty.$$

Setze dann

$$\int_{\Omega} f d\mu := \int_{\Omega} f_+ d\mu - \int_{\Omega} f_- d\mu \in \mathbb{R}.$$

Ist μ das Lebesgue-Maß, so heißt f Lebesgue-integrierbar.

Bem Nach Satz 2.6 und Korollar 2.7 gilt f (f messbar) $\Leftrightarrow (f_+ \text{ und } f_- \text{ messbar})$.

Achtung: Falls $f: \Omega \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_0^+$ messbar, so ist $\int_{\Omega} f d\mu \in \overline{\mathbb{R}}_0^+$ immer definiert.

Aber f heißt nur dann integrierbar, wenn $\int_{\Omega} f d\mu \in \mathbb{R}$.