

(59) Lemma 2.14 Def. 2.13 ist umkehrbar.

Beweis Ang. $f_k \nearrow f$ und $g_n \nearrow f$

mit $f_k, g_n: \Omega \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ einfach $\forall k, n$

setze dann $h_{k,n} = \min(f_k, g_n)$.

Dann ist $h_{k,n}: \Omega \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ messbar $\forall k, n$

Für n fest gilt auch $h_{k,n} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} g_n$.

Also nach Satz 2.12 (v)

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\Omega} f_k d\mu \geq \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\Omega} h_{k,n} d\mu = \int_{\Omega} g_n d\mu.$$

Satz 2.12 (iii)

Da n beliebig war gilt

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\Omega} f_k d\mu \geq \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} g_n d\mu$$

und aus Symmetriegründen auch " $\leq$ ". $\square$

Wir zeigen nun analoge Eigenschaften
von $\int f d\mu$ auch für f nicht einfach.
 $\nearrow$

(60) Satz 2.15 Sei (Ω, Σ, μ) ein Maßraum
und $f, g, f_k: \Omega \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_0^+$ messbar $\forall k$.
Dann gilt

$$(i) \int_{\Omega} cf d\mu = c \int_{\Omega} f d\mu \quad \forall c \in \mathbb{R}_0^+$$

$$(ii) \int_{\Omega} f + g d\mu = \int_{\Omega} f d\mu + \int_{\Omega} g d\mu$$

$$(iii) f \leq g \Rightarrow \int_{\Omega} f d\mu \leq \int_{\Omega} g d\mu$$

$$(iv) f_k \nearrow f \Rightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\Omega} f_k d\mu = \int_{\Omega} f d\mu$$

Beweis (i) - (iii) (Übung)

(iv) Sei $f_{k,j}: \Omega \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ einfach $\forall j$
und $f_{k,j} \nearrow f_k$.

Setze nun $g_n := \sup \{f_{k,j} \mid k, j \leq n\}$.

Dann ist $g_n: \Omega \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ einfach und
es gilt $g_n \nearrow f$. Also auch

$$\int_{\Omega} f d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} g_n d\mu. \quad (*)$$

Wegen

$$g_n \leq f_n \leq f$$

gilt aber nach (iii) auch

$$\int_{\Omega} g_n d\mu \leq \int_{\Omega} f_n d\mu \leq \int_{\Omega} f d\mu.$$

Aus (*) folgt somit auch

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} f_n d\mu = \int_{\Omega} f d\mu. \quad \square$$

⑤1) Satz 2.17 Sei (Ω, Σ, μ) ein Maßraum

und $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ messbar.

a) f integrierbar $\Leftrightarrow \int_{\Omega} |f| d\mu < \infty$

b) Es gebe $f_1, f_2: \Omega \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_0^+$ messbar mit
 $f = f_1 - f_2$ sowie

$$\int_{\Omega} f_1 d\mu < \infty \text{ und } \int_{\Omega} f_2 d\mu < \infty.$$

Dann ist f integrierbar und
es gilt

$$\int_{\Omega} f d\mu = \int_{\Omega} f_1 d\mu - \int_{\Omega} f_2 d\mu.$$

Beweis a) Es gilt stets $|f| = f_+ + f_-$

$$\text{und somit } \int_{\Omega} |f| d\mu = \int_{\Omega} f_+ d\mu + \int_{\Omega} f_- d\mu < \infty$$

$$\Leftrightarrow \left(\int_{\Omega} f_+ d\mu < \infty \text{ und } \int_{\Omega} f_- d\mu < \infty \right)$$

b) Aus $|f| \leq f_1 + f_2 < \infty$ folgt
 $\int_{\Omega} |f| d\mu < \infty$, also f integrierbar (u.g.a.).

Ferner gilt $f_+ \leq f_1$, also

$$g := f_1 - f_+ = f_2 - f_- \geq 0$$

und messbar mit

$$\int_{\Omega} g d\mu \leq \int_{\Omega} f_1 d\mu < \infty.$$

Nun gilt

$$\int_{\Omega} f_1 d\mu - \int_{\Omega} f_2 d\mu = \int_{\Omega} f_+ + g d\mu - \int_{\Omega} f_- + g d\mu$$

$$\stackrel{\text{Satz 2.15(ii)}}{=} \int_{\Omega} f_+ d\mu + \int_{\Omega} g d\mu - \int_{\Omega} f_- d\mu - \int_{\Omega} g d\mu$$

$$= \int_{\Omega} f_+ d\mu - \int_{\Omega} f_- d\mu = \int_{\Omega} f d\mu.$$

(62) Satz 2.18 Sei $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ ein Maßraum und $f, g: \Omega \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ integrierbar. Dann gilt

a) $\forall c \in \mathbb{R}$: cf integrierbar und

$$\int c f d\mu = c \int f d\mu$$

b) Sei $f+g$ auf Ω def. Dann ist $f+g$ integrierbar mit

$$\int (f+g) d\mu = \int f d\mu + \int g d\mu$$

c) $f \leq g \Rightarrow \int f d\mu \leq \int g d\mu$

$$d) \left| \int f d\mu \right| \leq \int |f| d\mu$$

Beweis a) Übung

b) Sei $F = f+g$. Dann gilt

$$F = f_+ + g_+ - (f_- + g_-).$$

Nach Satz 3.17 b) ist F integrierbar mit

$$\begin{aligned} \int f+g d\mu &= \int F d\mu \\ &= \int f_+ + g_+ d\mu - \int f_- + g_- d\mu \\ &= \int f_+ d\mu + \int g_+ d\mu - \int f_- d\mu - \int g_- d\mu \\ &= \int f d\mu + \int g d\mu. \end{aligned}$$

c) $f \leq g \Rightarrow (f_+ \leq g_+ \text{ und } g_- \leq f_-)$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \int f d\mu &= \int f_+ d\mu - \int f_- d\mu \\ &\leq \int g_+ d\mu - \int g_- d\mu = \int g d\mu \end{aligned}$$

d) $-|f| \leq f \leq |f| \Rightarrow -\int |f| d\mu \leq \int f d\mu \leq \int |f| d\mu$

□

(63) Integration über Teilmengen:

Def 2.19 Sei (Ω, Σ, μ) ein Maßraum
und $\Omega' \in \Sigma$ d.h. $\Omega' \subseteq \Omega$ messbar.

Dann heißt $\overset{\text{messbar}}{f}: \Omega \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ über Ω'
integrierbar, wenn $\chi_{\Omega'} f$
integrierbar ist und wir setzen

$$\int_{\Omega'} f d\mu := \int \chi_{\Omega'} f d\mu.$$

Ferner heißt $g: \Omega' \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ über
 Ω' integrierbar, wenn

$$\tilde{g}: \Omega \rightarrow \overline{\mathbb{R}}, \tilde{g}(x) = \begin{cases} g(x) & x \in \Omega' \\ 0 & x \notin \Omega' \end{cases}$$

über Ω (bzw. über Ω')
integrierbar ist. Setzen wir

$$\int_{\Omega'} g d\mu := \int_{\Omega} \tilde{g} d\mu = \int_{\Omega'} \tilde{g} d\mu.$$

Rem

f über Ω' integrierbar

$(\Rightarrow) f|_{\Omega'}$ int. bar bzgl.

(Ω', Σ', μ') mit

$$\Sigma' = \Sigma \cap \Omega' = \{ \mu|_{\Omega'} \mid \mu \in \Sigma \}$$

$$\mu' = \mu|_{\Sigma'}.$$

(64) Notation Sei (Ω, Σ, μ) ein
Maßraum. Und $A(x)$ eine
Aussage, die von $x \in \Omega$ abhängt.

Dann:

A gilt fast überall (bzgl. μ)

$:(\Rightarrow) A \quad \text{f. n.}$

$:(\Leftarrow) A \quad \text{a. e.}$

$:(\Rightarrow) \exists$ Nullmenge $N \subseteq \Omega$ mit
 $A(x)$ gilt $\forall x \in (\Omega \setminus N)$.