(65) <u>Satz 2.20</u> Sei (Ω, Σ, μ) ein Maßraum.

a) $\int_\Omega |f| d\mu = 0 \iff \{x \in \Omega \mid f(x) \neq 0\}$ ist Nullmenge

bzw. $f(x) = 0$ f.ü.

b) $f: \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ integrierbar

$\Rightarrow \{x \in \Omega \mid f(x) = \pm\infty\}$ ist Nullmenge

bzw $|f(x)| < \infty$ f.ü.

c) Seien $f, g: \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ messbar und

$\{x \in \Omega \mid f(x) \neq g(x)\}$ Nullmenge,

dann gilt f int.bar $\iff$ g int.bar. Dann gilt

$\int_\Omega f \, d\mu = \int_\Omega g \, d\mu$.

<u>Beweis</u> a) sei $S = \{x \in \Omega \mid f(x) \neq 0\} = f^{-1}(\overline{\mathbb{R}} \setminus \{0\})$.

Dann ist S messbar. Ang. $\int_\Omega |f| d\mu = 0$. Für $k \geq 1$

setze $\varphi_k := \min\{k|f|, \chi_S\}$. Dann gilt $\varphi_k \nearrow \chi_S$.

Wegen $\varphi_k \leq k|f|$ gilt auch $\int_\Omega \varphi_k d\mu \leq \int_\Omega k|f| d\mu = 0$

und $\int_\Omega \varphi_k d\mu \to \int_\Omega \chi_S d\mu = \mu(S) = 0$.

Sei nun S Nullmenge und

$\psi_k := \min\{k\chi_S, |f|\}$.

Dann gilt $\psi_k \nearrow |f|$. Also wegen

$\int_\Omega \psi_k d\mu = 0 \to \int_\Omega |f| d\mu = 0$.

b) Sei f int.bar und $M := \int_\Omega |f| d\mu < \infty$.

setze $S := \{x \in \Omega \mid f(x) = \pm\infty\}$. Dann gilt

$k\chi_S \leq |f|$, also $\int_\Omega \chi_S \leq \frac{1}{k} \int_\Omega |f| d\mu \;\; \forall k$

$\Rightarrow \int_\Omega \chi_S d\mu = \mu(S) = 0$

c) sei f int.bar.

setze $h = f - g$, dann gilt $h = 0$ f.ü.,

also nach a) $\int_\Omega |h| d\mu = 0 < \infty$ und somit

$$\int_\Omega |g| d\mu = \int_\Omega |f - h| d\mu \leq \int_\Omega |f| + |h|$$

$$= \int_\Omega |f| d\mu + \int_\Omega |h| d\mu = \int_\Omega |f| d\mu < \infty,$$

d.h. g int.bar. $\square$

66

Bem Nach Satz 2.20 können wir oBdA annehmen, daß int'bare $f: \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ nur endliche Werte annehmen. Sonst setze

$\tilde{f}: \Omega \to \mathbb{R}$,

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{falls } f(x) \neq \pm\infty \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Dann gilt $\tilde{f}: \Omega \to \mathbb{R}$ und $\tilde{f} = f$ f.ü. insbes $\int_\Omega f \, d\mu = \int_\Omega \tilde{f} \, d\mu$.

Def 2.21 Sei (Ω, Σ, μ) ein Maßraum. setze dann

$$\mathcal{L}^1(\Omega; \mu) = \{ f: \Omega \to \mathbb{R} \mid f \text{ int.bar} \}$$
$$= \{ f: \Omega \to \mathbb{R} \mid \int_\Omega |f| \, d\mu < \infty \}.$$

Für $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ Borel-messbar, $\Sigma = \mathcal{B}(\mathbb{R}^n) \cap \Omega$ und $\mu = \lambda^n$ schreiben wir auch kurz $\mathcal{L}^1(\Omega)$.

Nach Satz 2.18(a+b) ist $\mathcal{L}^1(\Omega; \mu)$ ein Vektorraum. Ferner gilt für die Abbildung $I: \mathcal{L}^1(\Omega; \mu) \to \mathbb{R}$, $I(f) := \int_\Omega f \, d\mu$

- I ist linear
- I ist monoton, d.h. $f \leq g \Rightarrow I(f) \leq I(g)$
- $$\left. \begin{aligned} |I(f) - I(g)| &= \left| \int_\Omega f \, d\mu - \int_\Omega g \, d\mu \right| \\ &= \left| \int_\Omega f - g \, d\mu \right| \\ &\underset{\triangle}{\leq} \int_\Omega |f - g| \, d\mu \end{aligned} \right\} (*)$$

Wir werden sehen, dass
$$f \mapsto \|f\|_{\mathcal{L}^1} := \int_\Omega |f| \, d\mu$$
<u>fast</u> eine Norm ist.

Dann <u>würde</u> (*) heißen dass I Lipschitz stetig bzgl. $\|\cdot\|_{\mathcal{L}^1}$ ist.

<u>Problem</u>: $\|f\|_1 = 0 \Rightarrow f = 0$ f.ü.

aber <u>nicht</u> $\|f\|_1 = 0 \Rightarrow f = 0$