

(67) Satz 2.22 Sei $(\Omega, \mathcal{E}, \mu)$ ein Maßraum
und $\varphi: \Omega \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_0^+$ messbar, dann
ist auch $\nu: \Omega \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_0^+$ mit

$$\nu(A) := \int_{\Omega} \chi_A \varphi d\mu = \int_A \varphi d\mu$$

ein Maß auf $(\Omega, \mathcal{E})$.

Beweis (Forsberg)

Man sagt ν ist ein Maß mit
Dichte φ bzgl. μ .

(68) 3. Konvergenz sätze

Satz 3.1 (Satz von Beppo Levi,
Satz von der monotonen Konvergenz)

Sei (Ω, Σ, μ) ein Maßraum und
 $f_k: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ eine monoton wachsende
Folge integrierbarer Funktionen, d.h.

$$f_1 \leq f_2 \leq \dots \leq f_k \leq f_{k+1} \leq \dots$$

Es existiere $M < \infty$ mit

$$\int_{\Omega} f_k d\mu \leq M \quad \forall k \geq 1$$

Dann ist auch $f := \lim_{k \rightarrow \infty} f_k: \Omega \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$, d.h.

$$f(k) = \lim_{k \rightarrow \infty} f_k(k)$$

int. bar und es gilt

$$\int_{\Omega} f d\mu = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\Omega} f_k d\mu.$$

(Analog für monoton fallend Folgen)

Beweis Setze $g_k := f_k - f_1$. Dann ist (g_k)
eine monoton wachsende Folge
und $g_k \geq 0 \quad \forall k$. Nach Satz 2.6
ist dann auch $g := \lim_{k \rightarrow \infty} g_k$ messbar
und nach Satz 2.15(iv) gilt

$$\int_{\Omega} g d\mu = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\Omega} g_k d\mu.$$

ferner gilt

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} g_k d\mu &= \int_{\Omega} f_k d\mu - \int_{\Omega} f_1 d\mu \\ &\leq M - \int_{\Omega} f_1 d\mu := M_1 < \infty \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \int_{\Omega} g d\mu \leq M_1 < \infty.$$

Also ist g int. bar und somit auch

$$f = \lim_{k \rightarrow \infty} f_k = \lim_{k \rightarrow \infty} (f_k - f_1) + f_1 = g + f_1.$$

$$\text{Und es gilt } \int f = \int g + \int f_1 = \lim \int f_k. \quad \square$$

(69) Satz 3.2 Seien $a, b \in \mathbb{R}, a < b$ und

$f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ Riemann-int. bar.

Dann ist f (gg.f nach Änderung auf $\mathbb{C}$)

einer Nullmenge) Borel-messbar,

(Lebesgue-) integrierbar und es gilt

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{[a,b]} f d\lambda.$$

Beweis Wir verwenden den

Maßraum $\Omega = [a, b], \mathcal{S} = \mathcal{B}([a, b]) = \mathcal{B}(\mathbb{R}) \cap [a, b]$

so wie $\lambda = \lambda|_{\mathcal{S}}: \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{R}$.

Erinnerung: f Riemann-int. bar

$(\Rightarrow) \forall \varepsilon > 0 \exists \rho, \psi: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ Treppenfunk-

tionen m. $\rho \leq f \leq \psi$ und

$$\int_a^b \psi(x) dx - \int_a^b \rho(x) dx < \varepsilon.$$

Seien nun für $k \in \mathbb{N}, \varepsilon = \frac{1}{k} > 0, \hat{\rho}_k \leq f \leq \hat{\psi}_k$ solche Funktionen. Setze dann

$$\rho_k = \max\{\rho_1, \dots, \rho_k\}, \psi_k = \min\{\psi_1, \dots, \psi_k\}.$$

Dann gilt auch $\rho_1 \leq \dots \leq \rho_k \leq f \leq \psi_k \leq \dots \leq \psi_1$

$$\int_a^b \psi_k(x) dx - \int_a^b \rho_k(x) dx < \varepsilon = \frac{1}{k}$$

und

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_a^b \rho_k(x) dx = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_a^b \psi_k(x) dx.$$

Außerdem sind ρ_k, ψ_k einfach mit

$$\int_a^b \rho_k dx = \int_{\Omega} \rho_k d\mu \quad \text{und} \quad \int_a^b \psi_k dx = \int_{\Omega} \psi_k d\mu.$$

Nach Satz 3.1 gilt dann für

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \rho_k = \rho \leq \psi = \lim_{k \rightarrow \infty} \psi_k$$

$$\int_{\Omega} \rho d\mu = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\Omega} \rho_k d\mu = \int_a^b \rho(x) dx = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\Omega} \psi_k d\mu = \int_{\Omega} \psi d\mu.$$

Inbes. gilt $\psi - \rho \geq 0$ und $\int_{\Omega} \psi - \rho d\mu = 0$,

also $\psi = \rho$ f.ü. und wegen $\rho \leq f \leq \psi$

auch $\psi = f = \rho$ f.ü. $\square$

(70) Bem Es gilt nicht Lebesgue-integrierbar
 $\Rightarrow$ f Riemann-integrierbar.

Bsp Sei $f = \chi_a|_{[0,1]} : [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$.
Dann ist f nicht Riemann-integrierbar, aber Lebesgue-integrierbar
mit $\int_{[0,1]} f d\lambda = 0$.