71

Notation: Im Folgenden schreiben wir für $\int_\Omega f\,d\mu = \int_\Omega f(x)\,d\mu(x)$ und für das Lebesgue-Maß $\int_\Omega f(x)\,dx = \int_\Omega f(x)\,d\mu(x) = \int_\Omega f\,d\mu$.

Frage: Kann man Grenzwert und Integration vertauschen? D.h. falls $f(x) = \lim_{k\to\infty} f_k(x)$ $\forall x \in \Omega$, gilt dann

$$\lim \int_\Omega f_k(x)\,dx = \int_\Omega \lim f_k(x)\,dx = \int_\Omega f(x)\,dx\,?$$

Satz 3.3 (Konvergenzsatz von Lebesgue, Satz von der majorisierten Konvergenz)

Sei (Ω, Σ, μ) ein Maßraum und $f_k : \Omega \to \mathbb{R}$ integrierbar $\forall k$ mit $f_k \to f$ punktweise f.ü. und $f : \Omega \to \mathbb{R}$. Es ex. eine int.bare Funktion $F : \Omega \to \mathbb{R}_0^+$ mit $|f_k| \leq F$

Dann ist f $\underbrace{\text{(ggf. nach Änderung auf einer Nullmenge)}}_{\circledast}$ int.bar und es gilt

$$\int_\Omega f\,d\mu = \lim \int_\Omega f_k\,d\mu \text{ und } \lim \int_\Omega |f - f_k|\,d\mu = 0.$$

Bem Ist (Ω, Σ, μ) vollständig, dann $\circledast$ unnötig

Beweis Sei $N \subseteq \Omega$ eine Nullmenge mit $f(x) = \lim_{k\to\infty} f_k(x)$ $\forall x \in \Omega \setminus N$. OBdA (vgl. 43) gilt $N \in \Sigma$. Setze nun

$$\tilde{f} = \chi_{\Omega\setminus N} f \text{ und } \tilde{f}_k = \chi_{\Omega\setminus N} f_k.$$

Dann gilt $\tilde{f} = f$ und $\tilde{f}_k = f$ f.ü., sowie $\tilde{f}_k \to \tilde{f}$ f.ü..

72 Setze nun
$$g_k = \sup\{\tilde{f}_i \mid k \leq i\}.$$
Dann gilt
$$\tilde{f} = \limsup_k \tilde{f}_k = \inf_k g_k.$$
Außerdem gilt
$$g_{k,j} \nearrow g_k$$
für $g_{k,j} = \sup\{f_i \mid k \leq i \leq j\}$

Nun ist jedes $g_{k,j}$ int.bar mit
$$\int_\Omega g_{k,j}\,d\mu \leq \int_\Omega F\,d\mu =: M < \infty \quad \forall j \geq k$$
Nach Satz 3.1 ist somit auch g_k int.bar mit $\int_\Omega g_k\,d\mu = \lim \int_\Omega g_{k,j}\,d\mu \geq -\int_\Omega F\,d\mu = -M.$

Wegen $g_k \searrow \tilde{f}$ gilt wieder nach Satz 3.1 dass f int.bar ist mit
$$\int_\Omega f\,d\mu = \lim_k \int_\Omega g_k\,d\mu.$$

Analog gilt für $h_k = \inf\{\tilde{f}_i \mid k \leq i\}$
$$\tilde{f} = \liminf_k \tilde{f}_k = \sup_i h_k$$
auch
$$\int_\Omega f\,d\mu = \lim_k \int_\Omega h_k\,d\mu$$
und wegen $h_k \leq f_k \leq g_k$ auch
$$\int_\Omega f\,d\mu = \lim_k \int_\Omega f_k\,d\mu.$$

Außerdem
$$|f - f_k| \leq g_k - h_k$$
und somit
$$\lim_k \int_\Omega |f - f_k|\,d\mu \leq \lim_k \int_\Omega g_k\,d\mu - \int_\Omega h_k\,d\mu = 0.$$
$\boxed{q}$

73

Als Folge von Satz 3.3 erhalten wir:

Satz 3.4 Sei (Ω, Σ, μ) ein Maßraum und $\Omega_k \in \Sigma$ (d.h. $\Omega_k \subseteq \Omega$ messbar) $\forall k$ mit $\Omega_k \nearrow \Omega$.

Sei $f : \Omega \to \mathbb{R}$ messbar und $f|_{\Omega_k}$ int.bar $\forall k$.

Fall

$$\lim_k \int_{\Omega_k} |f| \, d\mu < \infty,$$

dann ist f über Ω int.bar und es gilt

$$\int_\Omega f \, d\mu = \lim_k \int_{\Omega_k} f \, d\mu.$$

Beweis Setze $f_k = \chi_{\Omega_k} f$. Dann gilt $f = \lim_k f_k$.

Sei nun $F = |f|$ und $F_k = |f_k|$.

Dann gilt $F_k \nearrow F$. Da

$$\int_\Omega F_k d\mu = \int_{\Omega_k} |f| \, d\mu$$

beschränkt ist, ist nach Satz 3.1 F int.bar mit

$$\int_\Omega F \, d\mu = \lim_k \int_\Omega F_k \, d\mu < \infty.$$

Wegen $|f_k| \leq F$ ist Satz 3.3 anwendbar und es gilt: f int.bar mit

$$\int_\Omega f \, d\mu = \lim_k \int_\Omega f_k \, d\mu = \lim_k \int_{\Omega_k} f \, d\mu.$$

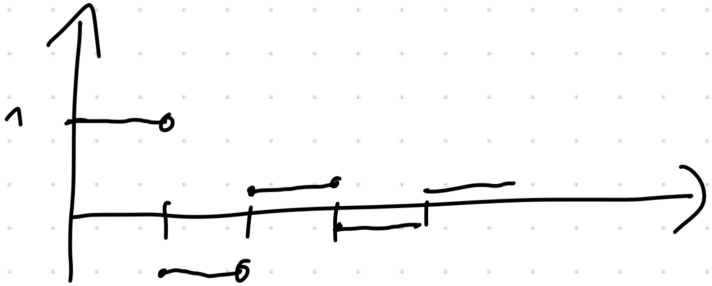
$\boxtimes$

(74) **Bem:** Es gilt nicht

f uneigentlich Riemann-intbar
$\Rightarrow$ f Lebesgue-intbar

Betrachte: $f: \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}$ mit

$$f|_{[k-1,k)} = (-1)^k \frac{1}{k} \quad k \in \mathbb{N}$$



Dann gilt für $r \in [m, m+1)$

$$\int_0^r f(x)\,dx = \int_0^m f(x)\,dx + \int_m^r f(x)\,dx$$
$$= \sum_{k=1}^m (-1)^k \frac{1}{k} + \underbrace{\frac{r-m}{m+1}}_{R(r)}$$

Erinnerung (Leibniz-Kriterium)
Sei (a_n) eine monoton fallende Nullfolge, dann konvergiert $\sum_{n=1}^\infty (-1)^n a_n$.

Da $\sum_{k=1}^\infty (-1) \frac{1}{k}$ konvergiert und

$|R(r)| \le \frac{1}{\lceil r \rceil} \xrightarrow{r \to \infty} 0$,

gilt $\int_0^\infty f(x)\,dx = \lim_{r \to \infty} \int_0^r f(x)\,dx \in \mathbb{R}$ ex.

Aber es gilt: Ang. f (Lebesgue-intbar)

$\Rightarrow \int_0^\infty |f(x)|\,dx < \infty$ aber

$$\int_0^\infty |f(x)|\,dx \ge \int_0^m |f(x)|\,dx = \sum_{k=1}^m \frac{1}{k} \quad \forall m \in \mathbb{R}$$

mit $\sum_{k=1}^m \frac{1}{k} \xrightarrow{m \to \infty} \infty$ (harm. Reihe).

also ist f nicht Lebesgue-intbar.

75

Anderes Bsp. $f: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}, f(x) = \frac{\sin(x)}{x}$

(Forster)

Bem. Allgemein gilt für

$$f|_{[k-1,k)} = (-1)^k a_k$$

mit $a_k \downarrow 0$: $f: \mathbb{R}_0^+$ uneigentlich Riemann-intbar

Aber f nur Lebesgue-intbar, wenn $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergiert.

Bem Satz 3.3 $\Rightarrow$ Majorantenkriterium.
(Übung)