76

Erinnerung:

$\|\cdot\|_{L^1} : \mathcal{L}^1(\Omega, \mu) \to \mathbb{R}$ mit

$\|f\|_{L^1} = \int_\Omega |f| d\mu$ ist eine Halbnorm,

d.h.

- $\|f\|_{L^1} \geq 0$
- $\|sf\|_{L^1} = |s| \, \|f\|_{L^1} \; \forall s \in \mathbb{R}$
- $\|f+g\|_{L^1} \leq \|f\|_{L^1} + \|g\|_{L^1}$

$\forall f, g \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mu)$

Aber: $\|\cdot\|_{L^1}$ ist keine Norm, denn

$\|f\|_{L^1} = 0 \Rightarrow f = 0$ f.ü.

und nicht

$\|f\|_{L^1} = 0 \Rightarrow f = 0$

Def 3.5 Sei (Ω, Σ, μ) ein Maßraum

Dann heißt der Quotientenraum

$$L^1(\Omega, \mu) := \mathcal{L}^1(\Omega, \mu) / \mathcal{N}$$

mit $\mathcal{N} = \{ f \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mu) \mid \|f\|_{L^1} = \int_\Omega |f| d\mu = 0 \}$

Lebesgue-Raum.

77 **Bem**

- Aus den Eigenschaften von $\|\cdot\|_{L^1}$ folgt, dass $\mathcal{N}$ ein Vektorraum ist.
- Jedes Element $\hat{f} \in L^1(\Omega,\mu)$ ist eine <u>Äquivalenzklasse</u> von Funktionen.
- Sei $f \sim g :\Leftrightarrow f-g \in \mathcal{N}$

$$\Leftrightarrow \|f-g\|_{L^1} = 0$$
$$\Leftrightarrow f-g = 0 \text{ f.ü.}$$
$$\Leftrightarrow f = g \text{ f.ü.}$$

Dann gilt für $\hat{f} \in L^1(\Omega,\mu)$ und $f \in \hat{f}$, d.h. $\hat{f} = [f]_\sim$:

$$\hat{f} = [f]_\sim = \{g \in \mathcal{L}^1(\Omega,\mu) \mid f \sim g\}$$
$$= \{g \in \mathcal{L}^1(\Omega,\mu) \mid f = g \text{ f.ü.}\}.$$

Im Folgenden schreiben wir einfach $f = [f] \in L^1(\Omega,\mu)$ für $f \in \mathcal{L}^1(\Omega,\mu)$.

<u>Achtung</u>: Für $f,g \in L^1(\Omega,\mu)$ mit $f = g$ (im Sinne von $L^1(\Omega,\mu)$) gilt nur $f = g$ f.ü.

Insbesondere ist $f(x)$ <u>nicht</u> für jedes $x \in \Omega$ definiert, da man f immer auf <u>bel.</u> Nullmengen ändern kann.

Wir def. für $\hat{f} \in L^1(\Omega,\mu)$

$$\underbrace{\int_\Omega \hat{f}\, d\mu}_{\text{Äqui. klasse}} := \int_\Omega \underbrace{f}_{\text{Repräsentant}}\, d\mu \quad \text{für } \hat{f} = [f]$$

und somit

$$\|[f]\|_{L^1} = \int_\Omega |[f]|\, d\mu$$
$$= \int_\Omega [|f|]\, d\mu = \int_\Omega |f|\, d\mu = \|f\|_{L^1}$$

(78) Satz 3.6 $(L^1(\Omega,\mu), \|\cdot\|_{L^1})$ ist ein normierter Raum.

Beweis
- $L^1(\Omega,\mu)$ ist Vektorraum ✓
- $\|\cdot\|_{L^1}$ ist Halbnorm ✓

- $\|\cdot\|_{L^1}$ ist Norm: Sei $[f] \in L^1(\Omega,\mu)$ und $\|[f]\|_{L^1} = \int_\Omega |f| \, d\mu = 0$. Dann gilt $f = 0$ f.ü. und somit $f \sim 0$ und $0 \in [0]$, also ist $[f] = [0] = 0$ in $L^1(\Omega,\mu)$

∎