(79) **Dichte Unterräume von $L^1(\Omega)$:**

Eine Teilmenge (oder Unterraum) $V \subseteq L^1(\Omega)$ heißt <u>dicht in $L^1(\Omega)$</u>, wenn gilt:

$\forall u \in L^1(\Omega)\ \forall \varepsilon > 0\ \exists u_\varepsilon \in V : \|u - u_\varepsilon\|_{L^1} < \varepsilon.$

D.h. jedes $u \in L^1(\Omega)$ lässt sich bel. gut (im Sinne von $\|\cdot\|_{L^1}$) in V approximieren.

(so wie $\mathbb{Q}$ dicht in $\mathbb{R}$ ist.)

<u>Bsp</u> „Treppenfunktionen"

Sei (Ω, Σ, μ) ein Maßraum und $\mathcal{M} \subseteq \Sigma$. Dann heißt $\varphi : \Omega \to \mathbb{R}$ <u>Treppenfunktion</u> bzgl. $\mathcal{M}$, wenn

$$\varphi = \sum_{k=1}^{m} c_k \chi_{A_k} \quad \text{für } c_k \in \mathbb{R},\ A_k \in \mathcal{M},\ \mu(A_k) < \infty\ \forall k.$$

Setze nun:

$$\mathcal{T}(\Omega, \mathcal{M}, \mu) := \{\varphi : \Omega \to \mathbb{R} \mid \varphi \text{ Treppenfkt. bzg. } \mathcal{M}\}$$

Sei nun $\hat{\Sigma} \subseteq \Sigma$ eine Mengenalgebra mit $\langle \hat{\Sigma} \rangle^\sigma = \Sigma$ und $\mu|_{\hat{\Sigma}}$ endlich. Dann gilt

$$\underbrace{\mathcal{T}(\Omega, \hat{\Sigma}, \mu)}_{\text{elementare Treppenfkt}} \subseteq \underbrace{\mathcal{T}(\Omega, \Sigma, \mu)}_{\text{Treppenfkt.}} \subseteq L^1(\Omega, \mu).$$

<u>Bsp</u> $\Omega = \mathbb{R}^n$, $\Sigma = \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$, $\mu = \lambda^n$

$\hat{\Sigma} = Q(\mathbb{R}^n)$ „endl. Quadersummen".

(80)

Satz 3.7 Sei (Ω,Σ,μ) ein Maßraum, und $\hat{\Sigma}\subseteq\Sigma$ eine Mengenalgebra mit $\langle\hat{\Sigma}\rangle^{\sigma}=\Sigma$ und $\mu|_{\hat{\Sigma}}$ endlich. Dann ist $\mathcal{J}(\Omega,\hat{\Sigma},\mu)$ dicht in $\mathcal{L}^1(\Omega,\mu)$ bzgl. $\|\cdot\|_{\mathcal{L}^1}$

Beweis Sei $f\in\mathcal{L}^1(\Omega,\mu)$, dann

$\int_\Omega f^+ d\mu<\infty$. Also ex. $\varphi_k\nearrow f^+$ einfach, mit $\int_\Omega \varphi_k d\mu\to\int_\Omega f^+ d\mu$. Wegen

$0\leq\int_\Omega\varphi_k d\mu\leq\int_\Omega f^+ d\mu<\infty$ ist φ_k intbar

also $\varphi_k\in\mathcal{J}(\Omega,\Sigma,\mu)$ und

$$\|\varphi_k-f^+\|_{\mathcal{L}^1}=\int_\Omega|\underbrace{f^+-\varphi_k}_{\geq 0}|d\mu=\int_\Omega f^+-\varphi_k\, d\mu$$
$$=\int_\Omega f^+ d\mu-\int_\Omega\varphi_k d\mu<\varepsilon$$

für k groß genug.

Zu $\varepsilon>0$ ex. also $\varphi,\psi\in\mathcal{J}(\Omega,\Sigma,\mu)$ mit $\|f^+-\varphi\|_{\mathcal{L}^1}<\frac{\varepsilon}{2}$ und $\|f^--\psi\|_{\mathcal{L}^1}<\frac{\varepsilon}{2}$, also

$$\|f-(\varphi-\psi)\|_{\mathcal{L}^1}=\|f^+-\varphi-(f^--\psi)\|_{\mathcal{L}^1}$$
$$\leq\|f^+-\varphi\|_{\mathcal{L}^1}+\|f^--\psi\|_{\mathcal{L}^1}<\varepsilon.$$

Also $\mathcal{J}(\Omega,\Sigma,\mu)$ dicht in $\mathcal{L}^1(\Omega,\mu)$.

Sei $A\in\Sigma$ und $\varepsilon>0$ bel.. Dann ex. $\hat{A}\in\hat{\Sigma}$ mit

$$\varepsilon>\mu(A\Delta\hat{A})=\int_\Omega|\chi_A-\chi_{\hat{A}}|d\mu=\|\chi_A-\chi_{\hat{A}}\|_{\mathcal{L}^1}.$$

Also gilt auch

$\mathcal{J}(\Omega,\hat{\Sigma},\mu)$ dicht in $\mathcal{J}(\Omega,\Sigma,\mu)$.

$\blacksquare$

81

Def 3.8 Sei $(\Omega, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum. Für $f : \Omega \to \mathbb{R}$ heißt

$$\operatorname{supp} f = \overline{\{x \in \Omega \mid f(x) \neq 0\}}$$

der Träger von f.

Für $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ setze man

$$C_c(\Omega) := \left\{ f : \Omega \to \mathbb{R} \;\middle|\; \begin{array}{l} f \text{ stetig} \\ \operatorname{supp} f \subseteq \Omega \\ \operatorname{supp} f \text{ kompakt} \end{array} \right\}$$

Bem $f \in C_c(\Omega)$ lässt sich durch 0 zu $f \in C_c(\mathbb{R}^n)$ fortsetzen.

Satz 3.9 Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ offen. Dann ist $C_c(\Omega)$ dicht in $L^1(\Omega, \mathcal{B}(\Omega), \lambda^n)$ bzgl. $\|\cdot\|_{L^1}$.

Beweis (Forster)

Der Beweis verwendet:

Lemma 3.10 Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und nicht leer. Dann ex. eine Folge von Funktionen $\beta_k \in C_c(\Omega)$, $k \in \mathbb{N}$, mit

$$0 \leq \beta_k \leq 1 \text{ und } \beta_k \nearrow 1.$$

Def 3.10 Eine messbare Funktion $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ heißt lokal integrierbar, wenn zu jedem $x \in \mathbb{R}^n$ eine offene Umgebung U existiert, sodass $f|_U$ int.bar ist. Wir setzen

$$\mathcal{L}^1_{loc}(\mathbb{R}^n) := \{ f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \mid f \text{ lokal int.bar} \}.$$

Analog:

$$L^1_{loc}(\mathbb{R}^n) = \mathcal{L}^1_{loc}(\mathbb{R}^n) / \{ f \in \mathcal{L}^1_{loc}(\mathbb{R}^n) \mid \|f\|_{L^1} = 0 \}$$

$\|\cdot\|_{L^1}$ ist keine Norm auf $L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$.

Bsp

Lemma 3.11 Sei $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ messbar, dann gilt

f lokal int.bar $\Leftrightarrow$ $f|_K$ int.bar $\forall K \subseteq \mathbb{R}^n$ kompakt.

Beweis (Übung).

Korollar 3.12 Für $f \in \mathcal{L}^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ gilt:

$$f \text{ int.bar} \Leftrightarrow \lim_{r \to \infty} \int_{B_r(0)} |f(x)|\, dx < \infty.$$

Beweis „$\Rightarrow$" klar.

„$\Leftarrow$": • Für $\Omega_k = \overline{B_k(0)}$ gilt

$$\Omega_k \nearrow \mathbb{R}^n.$$

• $f \in \mathcal{L}^1_{loc}(\mathbb{R}^n) \Rightarrow \int_{\Omega_k} |f(x)|\, dx < \infty$

Satz 3.9 liefert das Ergebnis. ☺

(83) **Konvergenzbegriffe:** $f:\Omega\to\mathbb{R}$, $f_k:\Omega\to\mathbb{R}$

Erinnerung (Ana 2)

Punktweise Konvergenz: $f_k \xrightarrow[p.w.]{} f$

$\Leftrightarrow \forall x\in\Omega : f_k(x)\to f(x)$

$\Leftrightarrow \forall x\in\Omega\ \forall\varepsilon>0\ \exists n_0 : \forall n\geq n_0 \quad |f_k(x)-f(x)|<\varepsilon$

Gleichmäßige Konvergenz: $f_k \xrightarrow[glm.]{} f$

$\Leftrightarrow \forall\varepsilon>0\ \exists n_0 : \forall n\geq n_0\ \forall x\in\Omega : |f_k(x)-f(x)|<\varepsilon$

[Betrachte die Max.norm $\|f\|_\infty = \sup_{x\in\Omega} |f(x)|$
auf $B(\Omega)=\{f:\Omega\to\mathbb{R} \mid \|f\|_\infty<\infty\}$
Für $f, f_k\in B(\Omega)$ gilt dann:]

$\Leftrightarrow \quad \|f_k-f\|_\infty \to 0$

$\Leftrightarrow \quad f_k \xrightarrow[\|\cdot\|_\infty]{} f \qquad$ d.h. Konvergenz bzgl. $\|\cdot\|_\infty$

Sei nun (Ω,Σ,μ) ein Maßraum.

Konvergenz fast überall $f_k \xrightarrow[f.ü.]{} f$

$\Leftrightarrow \exists N\in\Omega$ Nullmenge mit

$\forall x\in\Omega\setminus N : f_k(x)\to f(x)$

$\mathcal{L}^1$-Konvergenz: $f_k \xrightarrow[\|\cdot\|_{\mathcal{L}^1}]{} f$
(Für $f, f_k\in\mathcal{L}(\Omega,\mu)$)

$\Leftrightarrow \|f_k-f\|_{\mathcal{L}^1}\to 0$

Frage: $f_k\in\mathcal{L}(\Omega,\mu)$ ist $\mathcal{L}^1$-Cauchyfolge

$\Leftrightarrow \forall\varepsilon>0\ \exists n_0\in\mathbb{N} : \forall n,m\geq n_0 : \|f_n-f_m\|_{\mathcal{L}^1}<\varepsilon.$