

§4 Eigenschaften

$$a) \left. \begin{array}{l} f_k \xrightarrow{\text{f.ü.}} f \\ f_k \xrightarrow{\text{f.ü.}} g \end{array} \right\} \Rightarrow f = g \text{ f.ü.}$$

$$b) \left. \begin{array}{l} f_k \xrightarrow{\|\cdot\|_{L^1}} f \\ f_k \xrightarrow{\|\cdot\|_{L^1}} g \end{array} \right\} \Rightarrow f = g \text{ f.ü.}$$

$$c) f_k \xrightarrow{\|\cdot\|_{L^1}} f \Rightarrow f_k \text{ ist } L^1\text{-Cauchy-Folge.}$$

$$d) \text{ Es ex. } F: \Omega \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_0^+ \text{ int. bar} \\ \text{mit } |f_k| \leq F \quad \forall k, \text{ dann} \\ f_k \xrightarrow{\text{f.ü.}} f \Rightarrow f_k \xrightarrow{\|\cdot\|_{L^1}} f \\ (\text{Satz 3.3!})$$

Fragen: • Gilt auch $f_k \xrightarrow{\|\cdot\|_{L^1}} f \Rightarrow f_k \xrightarrow{\text{f.ü.}} f$?
• Konvergieren L^1 -Cauchy-Folgen?

Im folgenden sei (Ω, Σ, μ) stets ein
Maßraum.

(85)

Fubini's Lemma:

Lemma 3.13 Sei $g_k \in L^1(\Omega, \mu) \forall k \in \mathbb{N}$
eine Folge mit

$$M := \sum_{k=1}^{\infty} \|g_k\|_{L^1} < \infty.$$

Dann ex. eine Funktion $g \in L^1(\Omega, \mu)$, so
dass für die Partialsummen $s_n := \sum_{k=1}^n g_k \in L^1(\Omega, \mu)$ gilt

$$s_n = \sum_{k=1}^n g_k \xrightarrow{\text{f.ü.}} g$$

$$\text{und} \quad s_n = \sum_{k=1}^n g_k \xrightarrow{\|\cdot\|_{L^1}} g$$

$$\text{bzw. } \|g - \sum_{k=1}^n g_k\|_{L^1} \rightarrow 0.$$

Beweis

$$\text{Setze } G_n := \sum_{k=1}^n |g_k|, \quad G := \sum_{k=1}^{\infty} |g_k|.$$

Dann gilt $G_n \in L^1(\Omega, \mu)$ und

$$\int G_n d\mu = \sum_{k=1}^n \|g_k\|_{L^1} \leq M \quad \forall n.$$

Wegen $G_n \nearrow G$ ist nach
Satz 3.1 (Beppo Levi) auch
 G integrierbar. Also ex. eine Nullmenge
 $N \subseteq \Omega$ mit

$$G(x) < \infty \quad \forall x \in \Omega \setminus N.$$

Somit konvergiert für alle $x \in \Omega \setminus N$
 $g(x) := \sum_{k=1}^{\infty} g_k(x) \in \mathbb{R}$

absolut. Für $x \in N$ setze $g(x) = 0$.

Nun gilt $s_n \xrightarrow{\text{f.ü.}} g$ und

$$\text{wegen } |s_n| = \left| \sum_{k=1}^n g_k \right| \leq G_n \leq G$$

liefert Satz 3.3 auch $s_n \xrightarrow{L^1} g$.
(bzw. d) □

(86) Satz 3.14 $L^1(\Omega, \mu)$ und $L^1(\Omega, \mu)$ sind vollständig, d.h. alle L^1 -Cauchyfolgen konvergieren. Zu einer L^1 -Cauchyfolge (f_k) in $L^1(\Omega, \mu)$ ex. also $f \in L^1(\Omega, \mu)$ mit $f_k \xrightarrow{L^1} f$ bzw. $\|f_k - f\|_{L^1} \rightarrow 0$.
 Ferner ex. eine Teilfolge f_{k_m} mit $f_{k_m} \xrightarrow[\substack{\text{f.ä.} \\ m \rightarrow \infty}]{} f$.

Beweis Sei $f_k \in L^1(\Omega, \mu)$ eine L^1 -Cauchyfolge. Dann ex. $k_1 < k_2 < \dots$ mit $\|f_{k_n} - f_{k_{n+1}}\|_{L^1} \leq 2^{-n} \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

Setze nun

$$g_1 = f_{k_1} \text{ und } g_n = f_{k_n} - f_{k_{n-1}} \quad \forall n \geq 2.$$

Dann gilt

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|g_n\|_{L^1} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} = 2 < \infty.$$

Also können wir Lemma 3.13 anwenden. Somit ex. $f \in L^1(\Omega, \mu)$, so dass für die Partialsummen

$$s_n = \sum_{\ell=1}^n g_{\ell} = f_{k_1} + (f_{k_2} - f_{k_1}) + \dots + (f_{k_n} - f_{k_{n-1}}) = f_{k_n}$$

gilt

$$s_n = f_{k_n} \xrightarrow[\substack{\text{f.ä.} \\ n \rightarrow \infty}]{} f$$

$$s_n = f_{k_n} \xrightarrow[\substack{L^1 \\ n \rightarrow \infty}]{} f$$

bzw.

$$\|f_{k_n} - f\|_{L^1} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Da f_k L^1 -Cauchyfolge ist, gilt auch für die gesamte Folge

$$\|f_k - f\|_{L^1} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$$

(Übung)



§7

Bem Ein vollständiger normierter Raum heißt Banachraum.
Also ist $L^1(\Omega, \mu)$ ein Banachraum.

Korollar 3.15 Konvergiert die Folge $f_k \in L^1(\Omega, \mu)$ im L^1 -Sinn gegen $f \in L^1(\Omega, \mu)$, dann ex. eine Teilfolge f_{k_m} mit $f_{k_m} \xrightarrow[m \rightarrow \infty]{f.ü.} f$.

Lemma 3.16 Für $f, g \in C_c(\mathbb{R}^n)$ gilt $f = g$ f.ü. $\Rightarrow f = g$.

Beweis (Übung)

D.h. für $f \in C_c(\mathbb{R}^n)$ enthält die Äquivalenzklasse

$$[f] = \{g \in L^1(\mathbb{R}^n) \mid f = g \text{ f.ü.}\}$$

kein weiteres $\tilde{f} \in C_c(\mathbb{R}^n)$.

Wir können also $\{[f] \mid f \in C_c(\mathbb{R}^n)\} \subseteq L^1(\mathbb{R}^n)$ mit $C_c(\mathbb{R}^n)$ identifizieren und $C_c(\mathbb{R}^n)$ als Unterraum von $L^1(\mathbb{R}^n)$ auffassen.

Somit gilt

$$\overline{C_c(\mathbb{R}^n)}^{\|\cdot\|_{L^1}} = L^1(\mathbb{R}^n),$$

d.h. $L^1(\mathbb{R}^n)$ ist die $\|\cdot\|_{L^1}$ -Vervollständigung von $C_c(\mathbb{R}^n)$.

Gleiches gilt für $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ off.