(88)

**Bem** $L^1(\mathbb{R}^n)$ ist auch separabel,

d.h. es ex. eine abzählbare, dichte Teilmenge.

## 4 Bewegungsinvarianz des Lebesgue-Maßes

**Erinnerung** (Lin A 1/2)

Eine Matrix $T \in \mathbb{R}^{n \times n}$ heißt Orthogonalmatrix, wenn $T^T T = I$.

**Bem**: Sei $T \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine Orthogonalmatrix.

a) Die Spalten von $T$ bilden eine Orthonormalbasis, denn für $T = (T_1, \dots, T_n)$ gilt
$$\langle T_i, T_j \rangle = (T^T T)_{ij} = \delta_{ij}$$

b) $T$ ist invertierbar mit $T^{-1} = T$

c) $\det(T) = \pm 1$

d) $T$ ist die Hintereinanderschaltung von Drehungen und Spiegelungen

c) Jede Drehung und Spiegelung um/an Teilräumen entspricht einer Orthogonalmatrix

<u>Def 4.1</u> Eine Abbildung $\Phi: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ heißt

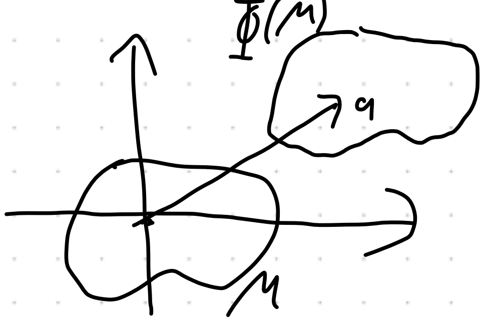
a) <u>Translation</u>, wenn

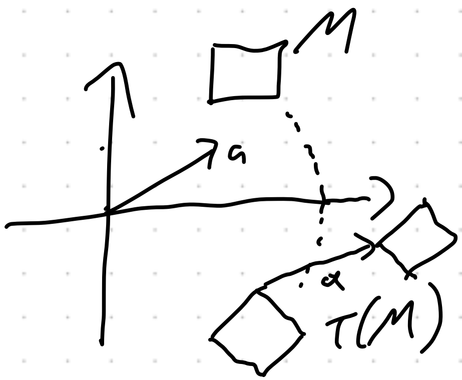
$$\Phi(x) = x + a \quad \text{für ein festes } a \in \mathbb{R}^n$$

b) (Starrkörper-) <u>Bewegung</u>, wenn

$$\Phi(x) = Tx + a \quad \text{für festes } a \in \mathbb{R}^n$$

und feste <u>Orthogonalmatrix</u> $T \in \mathbb{R}^{n \times n}$.




$$\Phi(M) = T(M) + a$$

<u>Lemma 4.2</u> Sei $\Phi: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ eine Translation, dann gilt für die Borel-$\sigma$-Algebra und das Lebesgue-Maß

a) $\mathbb{B}(\mathbb{R}^n) = \Phi(\mathbb{B}(\mathbb{R}^n))$

c) $\lambda^n(\Phi(M)) = \lambda^n(M) \quad \forall M \in \mathbb{B}(\mathbb{R}^n)$.

<u>Beweis</u> a) Offensichtlich gilt $\Phi(Q(\mathbb{R}^n)) = Q(\mathbb{R}^n)$, also auch

$$\Phi(\langle Q(\mathbb{R}^n)\rangle^\sigma) = \langle \Phi(Q(\mathbb{R}^n))\rangle^\sigma = \langle Q(\mathbb{R}^n)\rangle^\sigma$$

b) Sei $\tilde{\lambda}^n: Q(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}$ mit $\tilde{\lambda}^n(Q) = \lambda^n(\Phi(Q))$. Dann erzeugt $\tilde{\lambda}^n$ das Maß $\lambda^n \circ \Phi$. Wegen $\tilde{\lambda}^n(Q) = \lambda^n(Q) \ \forall Q \in Q(\mathbb{R}^n)$ gilt nun auch $\lambda^n = \lambda^n \circ \Phi$. ☒

<u>Bem</u> $\lambda^n$ heißt <u>translationsinvariant</u>.

90 **Satz 4.3** Sei $\mu : \mathcal{B}(\mathbb{R}^n) \to \overline{\mathbb{R}}_0^+$ ein translationsinvariantes Maß.

(*) $\begin{cases} \text{Es ex. } B_0 \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n) \text{ beschränkt} \\ \text{mit } 0 < \mu(B_0) < \infty \text{ und } \operatorname{int}(B_0) \neq \emptyset. \end{cases}$

Dann ex $c \in \mathbb{R}^+$ mit $\mu = c\lambda^n$.

**Bem** D.h. unter der Bedingung (*) ist $\lambda^n$ (bis auf Vielfache), das einzige translationsinvariante Maß auf $\mathbb{R}^n$!

**Bem** Ohne (*) wäre $\mu \equiv 0$ und $\mu \equiv \infty$ möglich.

**Beweis** (siehe Forster).

**Erinnerung** $GL(n, \mathbb{R}) = \{T \in \mathbb{R}^{n \times n} \mid T \text{ regulär}\}$

$O(n) = \{T \in \mathbb{R}^{n \times n} \mid T^T T = I\}$
$\subseteq GL(n, \mathbb{R})$.

**Lemma 4.4** Sei $T \in GL(n, \mathbb{R})$ (d.h. $T \in \mathbb{R}^{n \times n}$ invertierbar), dann ist $\mu = \lambda^n \circ T : \mathcal{B}(\mathbb{R}^n) \to \overline{\mathbb{R}}_0^+$ ein translationsinvariantes Maß.

**Beweis** Seien $A_k \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ $\forall k \in \mathbb{N}$ paarweise disjunkt. Da $T$ bijektiv, sind dann auch $T(A_k) \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ paarweise disjunkt und

$$\mu\left(\bigcup_k A_k\right) = \lambda^n\left(T\left(\bigcup_k A_k\right)\right) = \lambda^n\left(\bigcup_k T(A_k)\right)$$
$$= \sum_k \lambda^n(T(A_k)) = \sum_k \mu(A_k).$$

Also ist $\mu$ ein Maß. Sei nun $\Phi(x) = x + a$, dann gilt:

$$\mu(\Phi(A)) = \lambda^n(T(\Phi(A))) = \lambda^n(T(A) + Ta)$$
$$= \lambda^n(T(A)) = \mu(A).$$

D.h. $\mu$ ist translationsinvariant.

91

**Satz 4.5** Das Lebesgue-Maß ist bewegungsinvariant, d.h. für eine Bewegung $\Phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ gilt $\lambda^n \circ \Phi = \lambda^n$.

**Beweis** Sei $\Phi(x) = Tx + a$ für $a \in \mathbb{R}^n$ und $T \in O(n)$. Da $\lambda^n$ translationsinvariant ist, gilt $\lambda^n \circ \Phi = \lambda^n \circ T$, d.h. es reicht $a = 0$ zu betrachten. Nach Lemma 4.4 ist $\mu := \lambda^n \circ \Phi = \lambda^n \circ T$ translationsinvariant.

Sei nun $A = \overline{B_1(0)} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| \leq 1\}$. Damit ist $A$ beschränkt mit $\mathring{A} = B_1(0) \neq \emptyset$ und es gilt $\mu(A) = \lambda^n(T(A)) = \lambda^n(A) \in \mathbb{R}^+$

Also ex. nach Satz 4.3 ein $c \in \mathbb{R}^+$ mit $\mu = c\lambda^n$.

Wegen $\mu(A) = \lambda^n(A) \in \mathbb{R}^+$ gilt aber $c = 1$. $\square$

Jetzt: Änderung des Maßes bei linearen Transformationen.

**Lemma 4.6** Sei $T \in GL(n, \mathbb{R})$. Dann ex. Orthogonalmatrizen $S_1, S_2 \in O(n)$ und eine Diagonalmatrix $D \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mit $D_{ii} > 0$ mit

$$T = S_1 D S_2 . \quad (*)$$

**Beweis** (LinA oder Forster, basiert auf Diagonalisierung von $T^T T$.)

**Bem** (*) heißt Singulärwertzerlegung von $T$ und $D_{ii}$, $i = 1, \dots, n$ die Singulärwerte von $T$.

(92) **Satz 4.7** Sei $T \in GL(n, \mathbb{R})$. Dann gilt $\lambda^n \circ T = |\det T|\, \lambda^n$.

**Beweis** Sei $T = S_1 D S_2$ wie in Lem 4.6. Nach Lemma 4.4. ist $\lambda^n \circ D$ translations invariant. Nach Satz 4.3 ex. also $c \in \mathbb{R}^+$ mit $\lambda^n \circ D = c\lambda^n$. Für den Einheitswürfel $A = [0,1]^n$ gilt also $D(A) = \bigtimes_{i=1}^{n} [0, D_{ii}]$, also

$$(\lambda^n \circ D)([0,1]^n) = \lambda^n(D(A)) = \prod_{i=1}^{n} D_{ii}$$
$$= |\det D| = |\det D|\, \lambda^n([0,1]^n).$$

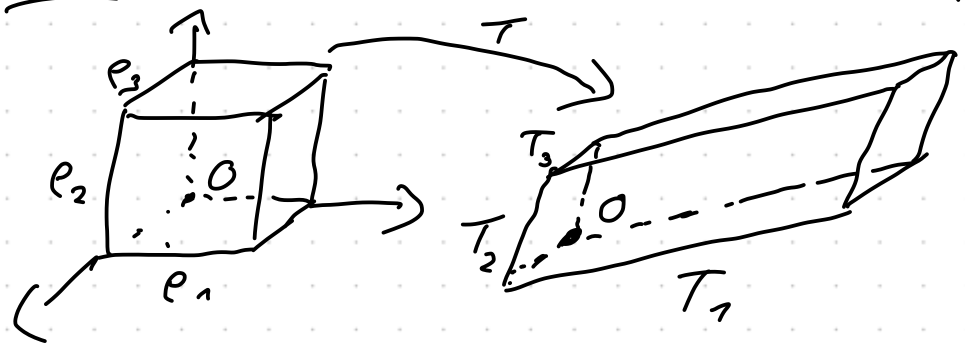
Also $c = |\det D|$. Ferner gilt

$$|\det T| = |(\det S_1)(\det D)(\det S_2)|$$
$$= |\det D| = c.$$

Nach Satz 4.5 gilt nun

$$\lambda^n \circ T = \lambda^n \circ S_1 \circ D \circ S_2 = \lambda^n \circ D \circ S_2$$
$$= |\det T|\, \lambda^n \circ S_2 = |\det T|\, \lambda^n. \quad \square$$

**Bsp** Sei $T \in GL(n, \mathbb{R})$ mit $T = (T_1, \dots, T_n)$




$P = T([0,1]^n)$ ist ein Parallelotop und es gilt

$$V(P) = \lambda^n(T([0,1]^n)) = |\det T|.$$