

(93) Ben Sei (Ω, Σ, μ) ein Maßraum,
 (Ω', Σ') ein Messraum und
 $\Phi: \Omega \rightarrow \Omega'$ messbar.
 Dann ist das Bildmaß
 $\Phi_* \mu := \mu \circ \Phi^{-1}: \Sigma' \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_0^+$
 ein Maß.

Satz 24.8 Sei $f: \Omega' \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ messbar,
 dann ist f genau dann i.h.b.,
 bzgl. $\Phi_* \mu$, wenn $f \circ \Phi: \Omega \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$
 i.h.b. bzgl. μ und dann gilt

$$\int_{\Omega} f \circ \Phi d\mu = \int_{\Omega'} f d(\Phi_* \mu)$$

Beweis (Forster / Übung)

Für $\Omega = \Omega' = \mathbb{R}^n$, $\Sigma = \Sigma' = \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$
 $\mu = \lambda^n$ und $\Phi(x) = Tx + a$
 mit $T \in GL(n, \mathbb{R})$ gilt auch

$$\begin{aligned} \Phi_* \lambda^n &= \lambda^n \circ T^{-1} = |\det T^{-1}| \lambda^n \\ &= \frac{1}{|\det T|} \lambda^n. \end{aligned}$$

D.h. $\Phi_* \lambda^n$ ist ein Maß
 mit konstanter Dichte $\frac{1}{|\det T|}$.

Korollar 4.9 Sei $T \in GL(n, \mathbb{R})$ und $a \in \mathbb{R}^n$
 und $\Phi(x) = Tx + a$. $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$
 ist genau dann Lebesgue-i.h.b.,
 wenn $f \circ \Phi$ Lebesgue-i.h.b. ist.
 In diesem Fall gilt

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} (f \circ \Phi)(x) dx &= \int_{\mathbb{R}^n} f d\Phi_* \lambda^n \\ &= \frac{1}{|\det T|} \int_{\mathbb{R}^n} f(x) dx. \end{aligned}$$

94) 5 Cavalierisches Prinzip und Satz von Fubini

- Wie können wir $\int_{\Omega} f(x) dx$ für $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ berechnen?

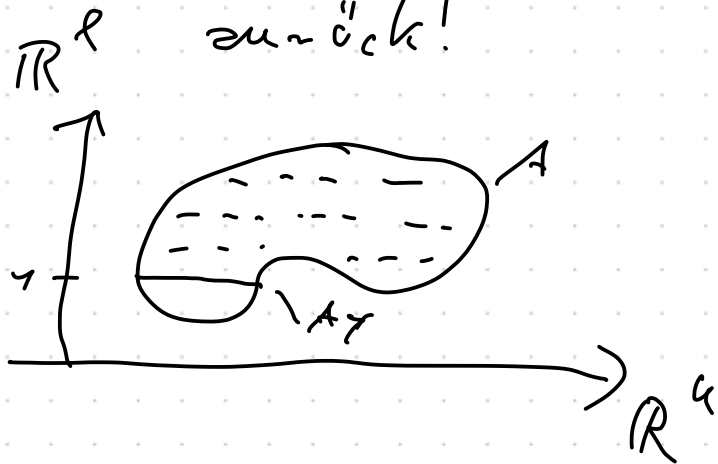
- können wir komponentenweise integrieren?

$$\int_{[0,1]^2} f(x,y) d(x,y) \stackrel{?}{=} \int_0^1 \left(\int_0^1 f(x,y) dx \right) dy$$

- Was ist mit $\Omega =$  ?

- Wie können wir $\text{Vol}(\Omega) = \lambda^n(\Omega)$ berechnen?

Idee Führt Maß / Integral auf niedrig dim. Maß / Int. zurück!



Satz 5.1 Sei $k, l \in \mathbb{N}$ und $n = k + l$.

Für $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n) = \mathcal{B}(\mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^l)$

(d.h. für Borelsche Teilmenge $A \subseteq \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^l$) gilt dann

a) Für jedes feste $y \in \mathbb{R}^l$ und

$$A_y := \{x \in \mathbb{R}^k \mid (x, y) \in A\}$$

gilt $A_y \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^k)$, d.h. A_y ist eine Borelsche Teilmenge von $\mathbb{R}^k$.

b) Die Funktion $F_A : \mathbb{R}^l \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_{\geq 0}$

$$y \mapsto F_A(y) := \text{Vol}_k(A_y) = \lambda^k(A_y)$$

ist Borel-messbar auf $\mathbb{R}^l$.

c) Es gilt

$$\text{Vol}_n(A) = \lambda^n(A) = \int_{\mathbb{R}^l} \text{Vol}_k(A_y) d\lambda^l(y)$$

Beweis (Forster)

(95) Korollar 5.2 (Guldin'sches Prinzip)
 Sei $K \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ beschränkt. Für $t \in \mathbb{R}$ setze

$$K_t := \{ (x_1, \dots, x_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1} \mid (x_1, \dots, x_{n-1}, t) \in K \}.$$

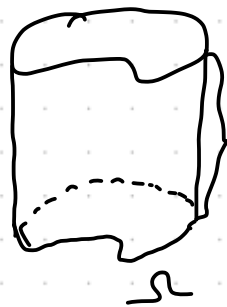
Dann ist $t \mapsto \text{Vol}_{n-1}(K_t)$
 ist bar und es gilt

$$\text{Vol}_n(K) = \int_{\mathbb{R}} \text{Vol}_{n-1}(K_t) dt.$$

Bsp a) Volumen eines Zylinders

Sei $B \in \mathbb{R}^{n-1}$ kompakt

und $\Omega = B \times [0, h]$. Dann gilt

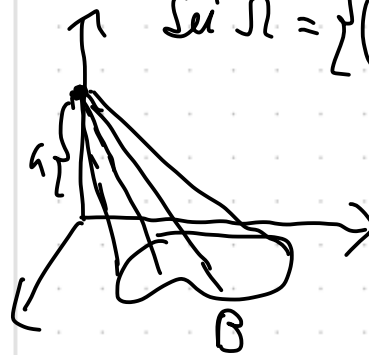


$$\Omega_t = \begin{cases} B & t \in [0, h] \\ \emptyset & \text{sonst} \end{cases}$$

und somit

$$\text{Vol}_n(\Omega) = \int_{\mathbb{R}} \text{Vol}_{n-1}(\Omega_t) dt = \int_0^h \text{Vol}_{n-1}(B) dt = \underbrace{h}_{\text{Höhe}} \cdot \underbrace{\text{Vol}_{n-1}(B)}_{\text{Fläche des Bas}}.$$

b) Volumen eines Kegels (mit Spitze $(0, h)$)
 Sei $\Omega = \{ ((1-\lambda)x, \lambda h) \mid x \in B, \lambda \in [0, 1] \}$



Dann gilt $(\lambda h = t \Rightarrow \lambda = \frac{t}{h})$

$$\Omega_t = \begin{cases} (1 - \frac{t}{h}) B & t \in [0, h] \\ \emptyset & \text{sonst} \end{cases}$$

$$\text{Vol}_{n-1}(\Omega_t) = \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \chi_{\Omega_t} d\lambda^{n-1}$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} \chi_B \circ T d\lambda^{n-1}$$

$$= \frac{1}{|\det T|} \int_{\mathbb{R}^n} \chi_B d\lambda^{n-1} = \left(1 - \frac{t}{h}\right)^{n-1} \text{Vol}_{n-1}(B)$$

$$\boxed{T = \begin{pmatrix} 1 - \frac{t}{h} \\ 0 \end{pmatrix}^{-1} \Rightarrow \det(T) = \left(1 - \frac{t}{h}\right)^{-(n-1)}}$$

$$\Rightarrow \text{Vol}_n(\Omega) = \int_{\mathbb{R}} \text{Vol}_{n-1}(\Omega_t) dt = \int_0^h \left(1 - \frac{t}{h}\right)^{n-1} \text{Vol}_{n-1}(B) dt$$

$$= \frac{h}{n} \text{Vol}_{n-1}(B).$$

(96) Lemma 5.3 (Satz von Tonelli) Seien $k, l \in \mathbb{N}, n = k + l$
 $f: \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^l \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_0^+$ messbar (bzgl. $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n), \lambda^n)$).

Dann ist für jedes $y \in \mathbb{R}^l$ auch

$x \mapsto f(x, y)$ messbar (bzgl. $(\mathbb{R}^k, \mathcal{B}(\mathbb{R}^k), \lambda^k)$).

Furthermore ist die Funktion

$$F: \mathbb{R}^l \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_0^+, \quad F(y) := \int_{\mathbb{R}^k} f(x, y) d\lambda^k(x) \in \overline{\mathbb{R}}_0^+$$

messbar (bzgl. $(\mathbb{R}^l, \mathcal{B}(\mathbb{R}^l), \lambda^l)$) und es gilt

$$\int_{\mathbb{R}^n} f d\lambda^n = \int_{\mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^l} f(x, y) d\lambda^k(x) d\lambda^l(y) = \int_{\mathbb{R}^l} F(y) d\lambda^l(y) = \int_{\mathbb{R}^l} \left(\int_{\mathbb{R}^k} f(x, y) d\lambda^k(x) \right) d\lambda^l(y).$$

Beweis - Für $f = \chi_A$ mit $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ ist
das gerade Satz 5.1.

- Somit gilt die Aussage auch für nicht-negative einfache Funktionen.
- Seien nun $\varphi_m \nearrow f$, φ_m nicht-negativ und einfach. Dann vererbt sich die Eigenschaft von φ_m auf f .

Dann es gilt auch

$$\varphi_m(\cdot, y) \nearrow f(\cdot, y)$$

$\Rightarrow f(\cdot, y)$ messbar

$$\text{und } \Phi_m(y) = \int_{\mathbb{R}^k} \varphi_m(x, y) d\lambda^k(x) \nearrow \int_{\mathbb{R}^k} f(x, y) d\lambda^k(x) = F(y)$$

Φ_m ist messbar ...

Korollar 5.4 Eine messbare $\square$

Funktion $f: \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^l \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ ist genau dann integrierbar, wenn

$$\int_{\mathbb{R}^l} \left(\int_{\mathbb{R}^k} |f(x, y)| d\lambda^k(x) \right) d\lambda^l(y) < \infty.$$