

97 Satz 5.5 (Satz von Fubini)

Seien $k, l \in \mathbb{N}$, $n = k + l$ und
 $f: \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^l \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$

int. bar. Dann ex. eine Nullmenge
 $N \subseteq \mathbb{R}^l$, so dass für jedes feste
 $y \in \mathbb{R}^l \setminus N$ die Funktion

$f_y = f(\cdot, y): \mathbb{R}^k \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$, $f_y(x) = f(x, y)$
integrierbar ist. Für

$$F(y) := \begin{cases} \int_{\mathbb{R}^k} f(x, y) d^k x & y \in \mathbb{R}^l \setminus N \\ 0 \text{ (bel.)} & \text{sonst} \end{cases}$$

ist dann auch $F: \mathbb{R}^l \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$
integrierbar und es gilt

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x, y) d^n(x, y) = \int_{\mathbb{R}^l} F(y) d^l y = \int_{\mathbb{R}^l} \left(\int_{\mathbb{R}^k} f(x, y) d^k x \right) d^l y.$$

Beweis Da es reicht, die Aussage für
 f^+ und f^- zu zeigen, sei
oBdA $f \geq 0$.

Nach Lemma 5.3 ist F messbar.
und es gilt

$$\int_{\mathbb{R}^l} F(y) d^l y = \int_{\mathbb{R}^n} f(x, y) d^n(x, y) < \infty.$$

Also ist auch F int. bar. Somit
ex. $N \subseteq \mathbb{R}^l$ mit

$$\int_{\mathbb{R}^k} f(x, y) d^k x = F(y) < \infty \quad \forall y \in \mathbb{R}^l \setminus N.$$

Dann ist aber für $y \in \mathbb{R}^l \setminus N$ auch
 $f(\cdot, y)$ int. bar. □

98 6 Transformationsformel

Erinnerung: (A9.2)

Def 6.1 Seien $U, V \subseteq \mathbb{R}^n$ offen. Eine Abbildung $\Phi: U \rightarrow V$ heißt C^k -Diffeomorphismus, falls Φ bijektiv ist und Φ und Φ^{-1} k -mal stetig diffbar sind. Ein C^1 -Diffeomorphismus heißt auch kurz Diffeomorphismus.

Satz 6.2 Seien $U, V \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $\Phi: U \rightarrow V$ ein Diffeomorphismus und $f: V \rightarrow \mathbb{R}$ stetig mit kompaktem Träger, d.h. $f \in C_c(V)$. Dann gilt:

$$\int_{\Phi(U)} f(y) dy = \int_U f(\Phi(x)) |\det D\Phi(x)| dx.$$

Beweis (Forster, viel Arbeit!)

Idee: Betrachte eine Zerlegung in kleine Würfel

- In genügend kleinen Würfeln W mit $x_0 \in W$ gilt

$$\left| \frac{\text{Vol}(\Phi(W))}{\text{Vol}(W)} - |\det D\Phi(x_0)| \right| < \varepsilon.$$

...

Satz 6.3 Seien $U, V \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $\Phi: U \rightarrow V$ ein Diffeomorphismus und $f: V \rightarrow \mathbb{R}$. Dann ist f genau dann int. bar, wenn

$$(f \circ \Phi) |\det D\Phi(\cdot)| : U \rightarrow \mathbb{R}$$

int. bar ist und es gilt dann

$$\int_{\Phi(U)} f(y) dy = \int_U f(\Phi(x)) |\det D\Phi(x)| dx.$$

(99)

Beweis Sei $g := (f \circ \Phi) / |\det D\Phi(\cdot)| : U \rightarrow \mathbb{R}$.

Es ist klar, dass f messbar $\Leftrightarrow g$ messbar.

a) Sei nun $f \in L^1(V)$. Da $C_c(V) \subseteq L^1(V)$ dicht ist, ex. Folge $f_k \in C_c(V)$ mit $f_k \xrightarrow{L^1} f$.

Nach Kor. 3.15 können wir o.B.d.A. $f_k \xrightarrow{\text{f.ü.}} f$ annehmen (wähle ggf. TF).

Sei nun $N \subseteq V$ Nullmenge mit $f_k(y) \rightarrow f(y) \quad \forall y \in V \setminus N$ und

$$g_k := (f_k \circ \Phi) / |\det D\Phi(\cdot)| : U \rightarrow \mathbb{R}$$

Dann gilt auch

$$g_k(y) \rightarrow g(y) \quad \forall y \in U \setminus \Phi^{-1}(N)$$

wobei $\Phi^{-1}(N) \subseteq U$ Nullmenge ist.

Wegen Satz 6.2 gilt nun

$$\int_{\Phi(U)} f_k(y) dy = \int_U g_k(x) dx.$$

Also auch

$$\|g_k - g\|_{L^1} = \|f_k - f\|_{L^1}$$

Da f_k L^1 -Cauchyfolge ist, ist auch g_k L^1 -CF.

Also ex. $\tilde{g} \in L^1(U)$ mit $g_k \xrightarrow{L^1} \tilde{g}$.

Damit gilt aber auch (ggf. für eine TF)

$$g_k \xrightarrow{\text{f.ü.}} \tilde{g}. \text{ Also } g = \tilde{g} \text{ f.ü.}$$

b) Sei nun $g \in L^1(U)$. Wende dann

a) mit vertauschten Rollen an:

$$\text{Für } \Psi := \Phi^{-1} \text{ gilt}$$

$$(g \circ \Psi) / |\det D\Psi| = f \dots \quad \square$$