(100) **Bsp** Polarkoordinaten in $\mathbb{R}^2$

Sei $\Phi : \mathbb{R}_0^+ \times [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$

mit $\Phi(r, \varphi) = r(\cos\varphi, \sin\varphi)$

Dann ist

$$\Phi : \underbrace{\mathbb{R}^+ \times (0, 2\pi)}_{U} \to \underbrace{\mathbb{R}^2 \setminus (\mathbb{R}_0^+ \times \{0\})}_{V}$$

ein Diffeomorphismus mit

$$D\Phi(r, \varphi) = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{pmatrix}$$

und

$$|\det D\Phi(r, \varphi)| = r$$

Also gilt, da $\mathbb{R}_0^+ \times [0, 2\pi] \setminus U$ und $\mathbb{R}^2 \setminus V$ Nullmengen sind:

f int.bar $\Leftrightarrow$ $r f \circ \Phi$ int.bar und

$$\int_{\mathbb{R}^2} f(x, y)\, dx\, dy = \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} r\, f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\, dr\, d\varphi.$$

101

7. Partielle Integration I

Erinnerung Für $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen:

$$C(U) = \{f : U \to \mathbb{R} \mid f \text{ stetig}\}$$

$$C_c(U) = \{f \in C(U) \mid \operatorname{supp} f \subseteq U \text{ kompakt}\}$$

$$C^k(U) = \{f : U \to \mathbb{R} \mid f \text{ k-mal stetig part. diff.bar}\}$$

Setze

$$C^\infty(U) := \bigcap_{k=0}^{\infty} C^k(U) = \{f : U \to \mathbb{R} \mid f \text{ bel. oft stetig part. diff.bar}\}$$

$$C_c^k(U) := C_c(U) \cap C^k(U) \quad \forall k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}.$$

Lemma 7.1 Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $i \in \{1, \dots, n\}$, dann gilt

$$\int_U \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x)\,dx = 0 \qquad \forall \varphi \in C_c^1(U)$$

Beweis Setze φ durch 0 auf $\mathbb{R}^n$ fort. Dann gilt $\varphi \in C_c^1(\mathbb{R}^n)$. Sei oBdA $i = 1$. Wähle R groß genug, dass $\operatorname{supp} \varphi \subseteq [-R, R]^n$, dann gilt

$$\int_U \frac{\partial \varphi}{\partial x_1}(x)\,dx = \int_{[-R,R]^n} \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x)\,dx$$

$$= \int_{[-R,R]^{n-1}} \int_{-R}^{R} \frac{\partial \varphi}{\partial x_1}(x_1, \dots, x_n)\,dx_1\,d(x_2, \dots, x_n)$$

$$= \int_{[-R,R]} \Big(\underbrace{\varphi(R, x_2, \dots, x_n)}_{=0} - \underbrace{\varphi(-R, x_2, \dots, x_n)}_{=0} \Big)\,d(x_2, \dots, x_n)$$

$$= 0$$

∎

Satz 7.2 Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $i \in \{1, \dots, n\}$.
Dann gilt $\forall f \in C^1(U)$ und $g \in C_c^1(U)$:

$$\int_U \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) g(x)\, dx = -\int_U f(x) \frac{\partial g}{\partial x_i}(x)\, dx$$

Beweis setze $\varphi := fg$. Dann gilt

$\varphi = fg \in C_c^1(U)$ und

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) g(x) + f(x) \frac{\partial g}{\partial x_i}(x).$$

Anwendung von Lemma 7.1 liefert

nun

$$\int_U \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) g(x) + f(x) \frac{\partial g}{\partial x_i}(x)\, dx = 0. \quad \boxtimes$$

Achtung: Mindestens eine Funktion muss kompakten Träger haben, damit fg auf ∂U verschwindet!

Sonst tauchen Randintegrale auf!

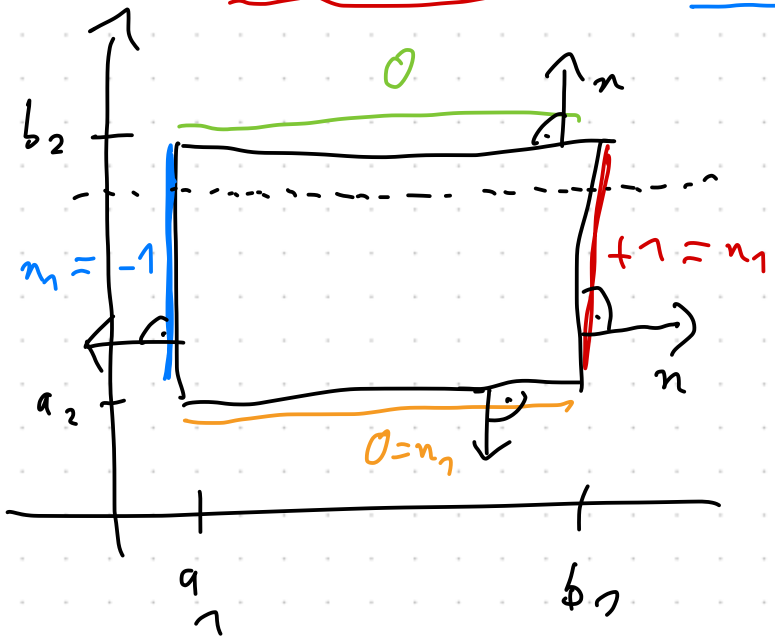
(103) **Motivation**: Sei $U=(a_1,b_1)\times(a_2,b_2)$ und $f\in C^1(\bar{U})$. Dann gilt

$$\int_U \frac{\partial f}{\partial x_1}(x)\,dx = \int_{a_2}^{b_2}\int_{a_1}^{b_1}\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1,x_2)\,dx_1\,dx_2$$

$$=\int_{a_2}^{b_2} f(b_1,x_2)-f(a_1,x_2)\,dx_2$$

$$=1\int_{a_2}^{b_2} f(b_1,x_2)\,dx_2 - 1\int_{a_2}^{b_2} f(a_1,x_2)\,dx_2$$

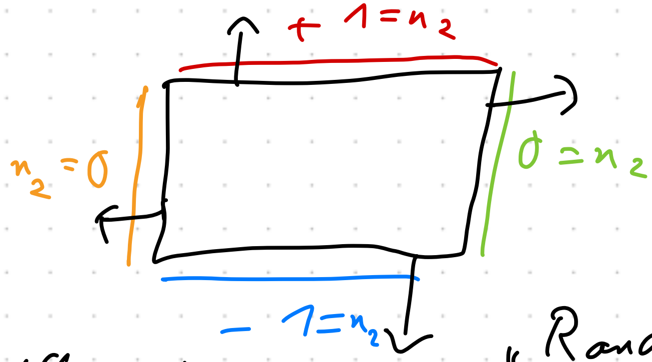
$$\dots + 0\int_{a_1}^{b_1} f(x_1,a_2)\,dx_1 + 0\int_{a_1}^{b_1} f(x_1,b_2)\,dx_1$$



Analog

$$\int_U \frac{\partial f}{\partial x_2}(x)\,dx = \dots$$

$$= 1\int_{a_1}^{b_1} f(x_1,b_2)\,dx_1 - 1\int_{a_1}^{b_1} f(x_1,a_2)\,dx_1 + 0 + 0.$$



Allgemein

$$(*) \quad \int_U \frac{\partial f}{\partial x_i}(x)\,dx = \overbrace{\int_{\partial U} f(x)\,n_i(x)\,dS(x)}^{\text{„Randintegral"}}$$